

## 量子场论 - 5

# 量子力学与量子场论中的路径积分

Notes from E. Fradkin (2021)

上一章中讨论了自由相对论标量场情况下量子力学和 QFT 的 Hilbert 空间图像。这里考虑量子力学和相对论标量场论的路径积分图像。

路径积分图像之所以重要，有两个原因。首先，它提供了量子力学的另一种补充图像，其中经典极限的作用显而易见。其次，它为研究微扰论不充分或完全失效的情况提供了一条直接途径。在量子力学中，解决这类问题的标准方法是 Wentzel、Kramers 和 Brillouin(WKB) 近似。然而，将 WKB 近似推广到 QFT（如果不是不可能的话）是极其困难的。相反，在量子力学中等同于 WKB 的 Feynman 路径积分的非微扰处理，却可以推广到 QFT 中的非微扰问题。本章中只对 boson 系统使用路径积分，如标量场。在以后的章节中将全面介绍路径积分，包括它在 fermion 场、abelian 和非 abelian 规范场、经典统计力学和非相对论多体系统中的应用。

## 1 路径积分和量子力学

考虑一个简单的量子力学系统，其动力学可以用广义坐标算符  $\hat{q}$  来描述。我们想计算振幅

$$F(q_f, t_f | q_i, t_i) = \langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle \quad (1)$$

称为 Wightman 函数。该函数表示在终止时间  $t_f$  时在坐标  $q_f$  处找到系统的振幅，已知系统在初始时间  $t_i$  时位于坐标  $q_i$ 。振幅  $F(q_f, t_f | q_i, t_i)$  只是演化算符的一个矩阵元

$$F(q_f, t_f | q_i, t_i) = \langle q_f | e^{i\hat{H}(t_f - t_i)/\hbar} | q_i \rangle \quad (2)$$

为简单起见，令  $|q_i, t_i\rangle = |0, 0\rangle$ ， $|q_f, t_f\rangle = |q, t\rangle$ 。然后，根据该矩阵元的定义，可以发现它符合

$$\lim_{t \rightarrow 0} F(q, t | 0, 0) = \langle q | 0 \rangle = \delta(q) \quad (3)$$

此外，经过一些代数运算，还发现

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial F}{\partial t} &= i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle q, t | 0, 0 \rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle q | e^{-i\hat{H}t/\hbar} | 0 \rangle \\ &= \langle q | \hat{H} e^{-i\hat{H}t/\hbar} | 0 \rangle \\ &= \int dq' \langle q | \hat{H} | q' \rangle \langle q' | e^{-i\hat{H}t/\hbar} | 0 \rangle \end{aligned} \quad (4)$$

其中，由于  $\{|q\rangle\}$  是一个态的完备集，所以单位算符  $I$  有如下展开（称为单位分解）：

$$I = \int dq' |q'\rangle \langle q'| \quad (5)$$

这里假设态是正交的：

$$\langle q | q' \rangle = \delta(q - q') \quad (6)$$

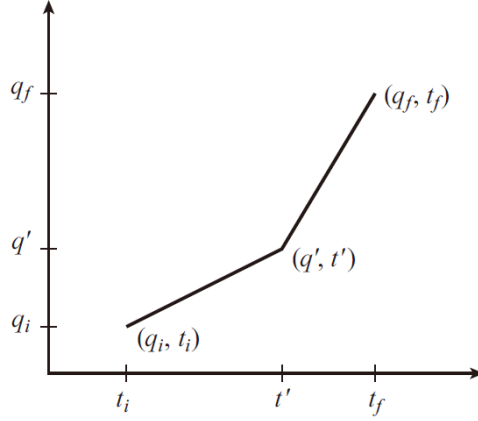


图 1: 从  $|q_i, t_i\rangle$  到  $|q_f, t_f\rangle$  的振幅是经过中间态  $|q', t'\rangle$  的振幅乘积求和。

因此

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} F(q, t|0, 0) = \int dq' \langle q | \hat{H} | q' \rangle F(q', t|0, 0) \equiv \hat{H}_q F(q, t|0, 0) \quad (7)$$

换句话说,  $F(q, t|0, 0)$  是满足初始条件 (3) 的 Schrödinger 方程的解。因此, 振幅  $F(q, t|0, 0)$  被称为 Schrödinger 传播子。

叠加原理告诉我们, 在终止时间找到终态系统的振幅是以下形式的振幅之和

$$F(q_f, t_f | q_i, t_i) = \int dq' \langle q_f, t_f | q', t' \rangle \langle q', t' | q_i, t_i \rangle \quad (8)$$

其中系统在中间时刻  $t'$  处于任意状的集合。这里以式 (8) 中的单位分解形式在中间时刻  $t'$  插入单位算符  $I$  来表示这种情况。

接下来把时间区间  $[t_i, t_f]$  划分为  $N$  个子区间, 每个子区间的长度为  $\Delta t$ :

$$t_f - t_i = N \Delta t \quad (9)$$

让  $\{t_j\}$  表示区间  $[t_i, t_f]$  中的一组点,  $j = 0, \dots, N + 1$ , 使得

$$t_i = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_N \leq t_{N+1} = t_f \quad (10)$$

显然, 对于  $k = 1, \dots, N + 1$ ,  $t_k = t_0 + k\Delta t$ 。重复式 (8) 中的步骤, 在中间时刻  $\{t_k\}$  插入单位分解, 可以发现

$$F(q_f, t_f | q_i, t_i) = \int dq_1 \dots dq_N \langle q_f, t_f | q_N, t_N \rangle \langle q_N, t_N | q_{N-1}, t_{N-1} \rangle \times \dots \times \dots \langle q_j, t_j | q_{j-1}, t_{j-1} \rangle \dots \langle q_1, t_1 | q_i, t_i \rangle \quad (11)$$

式 (11) 中的每个因子  $\langle q_j, t_j | q_{j-1}, t_{j-1} \rangle$  形为

$$\langle q_j, t_j | q_{j-1}, t_{j-1} \rangle = \langle q_j | e^{-i\hat{H}(t_j - t_{j-1})/\hbar} | q_{j-1} \rangle \equiv \langle q_j | e^{-i\hat{H}\Delta t/\hbar} | q_{j-1} \rangle \quad (12)$$

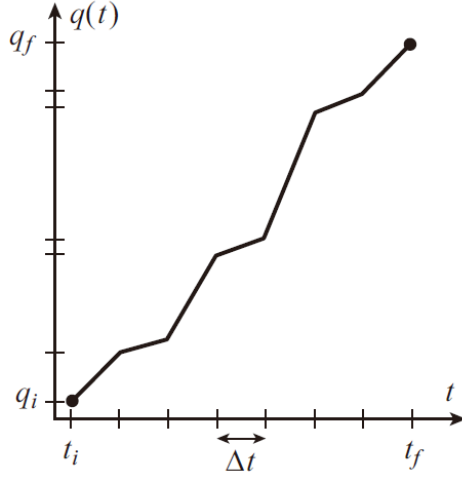


图 2: 系统的历史  $q(t)$ 。

在极限  $N \rightarrow \infty$ ,  $|t_i - t_f|$  固定且有限的情况下, 区间  $\Delta t$  变得无穷小,  $\Delta t \rightarrow 0$ 。因此, 当  $N \rightarrow \infty$ ,  $|t_i - t_f|$  时, 可以将式 (12) 中  $\langle q_j, t_j | q_{j-1}, t_{j-1} \rangle$  的表达式近似如下:

$$\begin{aligned}
 \langle q_j, t_j | q_{j-1}, t_{j-1} \rangle &= \langle q_j | e^{-iH\Delta t/\hbar} | q_{j-1} \rangle \\
 &= \langle q_j | \left\{ I - i\frac{\Delta t}{\hbar} \hat{H} + O((\Delta t)^2) \right\} | q_{j-1} \rangle \\
 &= \delta(q_j - q_{j-1}) - i\frac{\Delta t}{\hbar} \langle q_j | \hat{H} | q_{j-1} \rangle + O((\Delta t)^2)
 \end{aligned} \tag{13}$$

随着  $N \rightarrow \infty$  它渐近精确。

还可以在每个中间时刻  $t_j$  引入一组动量本征态完备集  $\{|p\rangle\}$ , 利用它们的单位分解

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dp |p\rangle \langle p| \tag{14}$$

回顾一下, 态  $|q\rangle$  和  $|p\rangle$  之间的交叠为

$$\langle q | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipq/\hbar} \tag{15}$$

对于如下形式的典型 Hamiltonian

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{q}) \tag{16}$$

其矩阵元为

$$\langle q_j | \hat{H} | q_{j-1} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} e^{ip_j(q_j - q_{j-1})/\hbar} \left[ \frac{p_j^2}{2m} + V(q_j) \right] \tag{17}$$

到同级近似也可以写出

$$\langle q_j, t_j | q_{j-1}, t_{j-1} \rangle \approx \int \frac{dp_j}{2\pi\hbar} \exp \left[ i \left( \frac{p_j}{\hbar} (q_j - q_{j-1}) - \Delta t H \left( p_j, \frac{q_j + q_{j-1}}{2} \right) \right) \right] \tag{18}$$

其中引入了“中点规则”，相当于在 Hamiltonian  $H(p, q)$  内做替换  $q_j \rightarrow \frac{1}{2}(q_j + q_{j-1})$ 。综合上述，可发现矩阵元  $\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle$  变为

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^N dq_j \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^{N+1} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^{N+1} \left[ p_j (q_j - q_{j-1}) - \Delta t H \left( p_j, \frac{q_j + q_{j-1}}{2} \right) \right] \right\} \quad (19)$$

因此，在极限  $N \rightarrow \infty$ ， $|t_i - t_f|$  固定不变的情况下，振幅  $\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle$  由（形式）表达式给出

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = \int \mathcal{D}p \mathcal{D}q e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt [p\dot{q} - H(p, q)]} \quad (20)$$

其中用到记号

$$\mathcal{D}p \mathcal{D}q \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^N \frac{dp_j dq_j}{2\pi\hbar} \quad (21)$$

其定义了积分测度。函数或构型  $(q(t), p(t))$  必须满足初始条件和终止条件：

$$q(t_i) = q_i \quad q(t_f) = q_f \quad (22)$$

因此矩阵元  $\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle$  可以表示为相空间中历史的总和。每段历史的权重就是式 (20) 中的指数因子。注意括号中的量就是 Lagrangian,

$$L = p\dot{q} - H(p, q) \quad (23)$$

因此矩阵元就是

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = \int \mathcal{D}p \mathcal{D}q e^{\frac{i}{\hbar} S(q, p)} \quad (24)$$

其中  $S(q, p)$  是每段历史  $(q(t), p(t))$  的作用量。还要注意的，求和（或积分）是在独立函数  $q(t)$  和  $p(t)$  上运行的，它们不需要满足任何约束条件（初始条件和终止条件除外），尤其是，它们不是运动方程的解。这类表达式称为路径积分。它们也被称为“泛函积分”，因为积分测度是函数空间上的和，而不是传统积分中的数域。

使用 Gaussian 积分形式（涉及解析延拓），

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{i(p\dot{q} - \frac{p^2}{2m}) \frac{\Delta t}{\hbar}} = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t}} e^{i \frac{\Delta t}{2\hbar} \dot{q}^2} \quad (25)$$

可以明确地将路径积分中的动量积分出来并找到一个只涉及坐标历史的公式。注意由于初态和末态都有良定义的位置，因此在动量上不存在初始条件和终止条件。结果是

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = \int \mathcal{D}q e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt L(q, \dot{q})} \quad (26)$$

即 Feynman 路径积分。这里的  $L(q, \dot{q})$  是 Lagrangian,

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q) \quad (27)$$

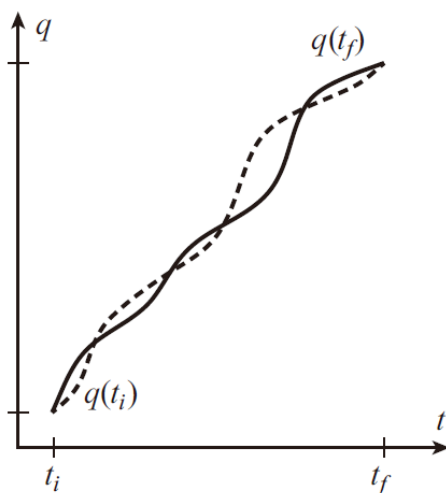


图 3: 具有相同初态和末态的两种历史。

对历史  $q(t)$  的求和受边界条件  $q(t_i) = q_i$  和  $q(t_f) = q_f$  的限制。

Feynman 路径积分告诉我们，在对应的极限  $\hbar \rightarrow 0$  中，唯一对路径积分有重大贡献的历史必须是使作用量  $S$  平稳的历史，否则，快速振荡的指数贡献加起来将等于零。换句话说，在经典极限中，只有一个历史  $q_c(t)$  有贡献。对于这个历史  $q_c(t)$ ，动作量  $S$  是平稳的， $\delta S = 0$ ，而  $q_c(t)$  是经典运动方程的解：

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \quad (28)$$

换句话说，在对应的极限  $\hbar \rightarrow 0$  中，Feynman 路径积分的计算简化为最小作用量原理应该成立的要求。这就是经典极限。

## 2 计算量子力学中的路径积分

先讨论下面的问题。我们希望知道如何计算 Lagrangian 为式 (27) 标准形式的动力学系统的振幅  $\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle$ 。为简单起见从线性谐振子开始。

线性谐振子的 Hamiltonian 为

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2 \quad (29)$$

相关的 Lagrangian 为

$$L = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - \frac{m\omega^2}{2} q^2 \quad (30)$$

设  $q_c(t)$  为经典轨迹。它是经典运动方程的解：

$$\frac{d^2 q_c}{dt^2} + \omega^2 q_c = 0 \quad (31)$$

记  $q(t)$  为系统的任意历史， $\xi(t)$  为其与经典解  $q_c(t)$  的差。由于所有历史，包括经典轨迹  $q_c(t)$ ，都服从相同的初始条件和终止条件，

$$q(t_i) = q_i \quad q(t_f) = q_f \quad (32)$$

由此可见  $\xi(t)$  遵循的是为零的初始条件和终止条件：

$$\xi(t_i) = \xi(t_f) = 0 \quad (33)$$

经过一些琐碎的代数运算，很容易证明任意历史  $q(t)$  的作用量  $S$  变为

$$S(q, \dot{q}) = S(q_c, \dot{q}_c) + S(\xi, \dot{\xi}) + \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{d}{dt} \left[ m\xi \frac{dq_c}{dt} \right] + \int_{t_i}^{t_f} dt m\xi \left( \frac{d^2 q_c}{dt^2} + \omega^2 q_c \right) \quad (34)$$

由于涨落  $\xi(t)$  服从边界条件式 (33)，第三项为零。最后一项也为零，因为  $q_c$  是经典运动方程的解，即式 (31)。这两个特征适用于所有系统，即使它们不是简谐系统。然而，式 (34) 中第二项  $\xi$  的 Lagrangian（及作用量）一般与经典轨迹（第一项）的作用量不同。只有谐振子  $S(\xi, \dot{\xi})$  与  $S(q_c, \dot{q}_c)$  具有相同的形式。

因此，对于谐振子，可以得到路径积分

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = e^{\frac{i}{\hbar} S(q_c, \dot{q}_c)} \int_{\xi(t_i)=\xi(t_f)=0} D\xi e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt L(\xi, \dot{\xi})} \quad (35)$$

注意，关于初态和末态的信息只能通过与经典轨迹相关的因子进入。对于线性谐振子，量子力学贡献与初末态无关。因此，需要做两件事：(1) 需要运动方程的显式解  $q_c(t)$ ，为此要计算  $S(q_c, \dot{q}_c)$ ；(2) 需要计算量子力学修正，即式 (35) 中的最后一个因子，它可以测量量子涨落的强度。

对于 Lagrangian 为式 (27) 形式的一般动力学系统，式 (34) 的作用量为

$$S(q, \dot{q}) = S(q_c, \dot{q}_c) + S_{\text{eff}}(\xi, \dot{\xi}; q_c) + \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{d}{dt} \left[ m\xi \frac{dq_c}{dt} \right] + \int_{t_i}^{t_f} dt \left( m \frac{d^2 q_c}{dt^2} + \frac{\partial V}{\partial q} \Big|_{q_c} \right) \xi(t) \quad (36)$$

其中  $S_{\text{eff}}$  是涨落  $\xi(t)$  的有效作用，其形式为

$$S_{\text{eff}}(\xi, \dot{\xi}) = \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{1}{2} m \dot{\xi}^2 - \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{t_i}^{t_f} dt' \frac{\partial^2 V}{\partial q(t) \partial q(t')} \Big|_{q_c} \xi(t) \xi(t') + O(\xi^3) \quad (37)$$

同样，边界条件  $\xi(t_i) = \xi(t_f) = 0$  及  $q_c(t)$  是运动方程的解这一事实意味着式 (36) 的最后两项恒为零。

因此，只要允许忽略  $O(\xi^3)$ （及更高阶）修正，有效作用量  $S_{\text{eff}}$  就可以用一个涨落  $\xi$  二次方的作用量来近似。一般来说，这个有效作用量取决于实际的经典轨迹，因为在

一般情况下,  $V''(q_c)$  不是常数, 而是由  $q_c(t)$  决定的时间函数。但是, 如果我们对  $V(q)$  势最小值附近的量子涨落感兴趣, 那么  $q_c(t)$  是常数 (等于最小值)。下面将详细讨论这种情况。

在开始实际计算之前, 值得问一问的是, 什么时候忽略  $O(\xi^3)$  项 (和更高) 会是一个很好的近似。由于是在经典路径  $q_c$  附近展开的, 因此预计在正式取极限  $\hbar \rightarrow 0$  时, 这种近似应该是正确的。在路径积分中, 有效作用量总是出现在组合  $S_{\text{eff}}/\hbar$  中。因此, 对于  $\xi$  二次方的有效作用量, 可以通过重标度化来消除对  $\hbar$  的依赖

$$\xi = \sqrt{\hbar} \tilde{\xi} \quad (38)$$

这种重标度化使经典贡献  $S(q_c)/\hbar$  不受影响。然而, 幂次大于  $\xi$  的二次项 (例如,  $O(\tilde{\xi}^n)$ ) 标度化类似于  $\hbar^{n/2}$ 。因此, 作用量 (除以  $\hbar$ ) 的展开形式为

$$\frac{S}{\hbar} = \frac{1}{\hbar} S^{(0)}(q_c) + S^{(2)}(\tilde{\xi}; q_c) + \sum_{n=3}^{\infty} \hbar^{n/2-1} S^{(n)}(\tilde{\xi}; q_c) \quad (39)$$

因此, 在  $\hbar \rightarrow 0$  的极限下, 可以用  $\hbar$  的幂来展开路径积分的权重。要计算的矩阵元的形为

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = e^{iS^{(0)}(q_c)/\hbar} \mathcal{Z}^{(2)}(q_c) (1 + O(\hbar)) \quad (40)$$

$\mathcal{Z}^{(2)}(q_c)$  是只保留二次项近似的结果。高阶项是  $\xi$  的幂级数展开, 是  $\hbar$  的解析函数。这里利用了一个事实, 即根据对称性, 在大多数相关情况下,  $\xi$  的奇数次幂一般不会产生贡献, 尽管在某些情况下会。

现在计算量子涨落的四阶效应。这相当于 WKB 近似。用  $\mathcal{Z}$  标记这个因子:

$$\mathcal{Z}^{(2)}(q_c) = \int_{\tilde{\xi}(t_i)=\tilde{\xi}(t_f)=0} D\tilde{\xi} e^{iS_{\text{eff}}^{(2)}(\tilde{\xi}, \dot{\tilde{\xi}}; q_c)} \quad (41)$$

不难发现, 由于边界条件的存在, 作用量  $S_{\text{eff}}(\xi, \dot{\xi})$  变为

$$S_{\text{eff}}(\tilde{\xi}, \dot{\tilde{\xi}}) = \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} dt \tilde{\xi}(t) \left[ -m \frac{d^2}{dt^2} - V''(q_c(t)) \right] \tilde{\xi}(t) \quad (42)$$

微分算符

$$\hat{A} = -m \frac{d^2}{dt^2} - V''(q_c(t)) \quad (43)$$

有粒子在势  $-V''(q_c(t))$  的“坐标”  $t$  上的 Schrödinger 算符形式。令  $\psi_n(t)$  为满足边界条件  $\psi_n(t_i) = \psi_n(t_f) = 0$  的  $\hat{A}$  的本征函数的完备集。完备性和正交性意味着本征函数  $\{\psi_n(t)\}$  满足

$$\sum_n \psi_n^*(t) \psi_n(t') = \delta(t-t') \quad \int_{t_i}^{t_f} dt \psi_n^*(t) \psi_m(t) = \delta_{n,m} \quad (44)$$

满足式 (33) 中边界条件为零的任意函数  $\tilde{\xi}(t)$  可以展开为本征基函数  $\{\psi_n(t)\}$  的线性组合:

$$\tilde{\xi}(t) = \sum_n c_n \psi_n(t) \quad (45)$$

显然, 应该有  $\tilde{\xi}(t_i) = \tilde{\xi}(t_f) = 0$  的结果。

对于  $q_i = q_f = q_0$  的特殊情况, 其中  $q_0$  是势  $V(q)$  的最小值, 可得  $V''(q_0) = \omega_{\text{eff}}^2 > 0$  是一个常数, Schrödinger 算符的本征矢就是平面波。对于线性谐振子,  $\omega_{\text{eff}} = \omega$ 。因此, 在这种情况下本征矢为

$$\psi_n(t) = b_n \sin(k_n(t - t_i)) \quad (46)$$

其中

$$k_n = \frac{\pi n}{t_f - t_i} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (47)$$

及  $b_n = 1/\sqrt{t_f - t_i}$ 。  $\hat{A}$  的本征值为

$$A_n = k_n^2 - \omega_{\text{eff}}^2 = \frac{\pi^2}{(t_f - t_i)^2} n^2 - \omega_{\text{eff}}^2 \quad (48)$$

通过式 (45) 的展开, 发现作用量  $S^{(2)}$  形为

$$S^{(2)} = \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} dt \tilde{\xi}(t) \hat{A} \tilde{\xi}(t) = \frac{1}{2} \sum_n A_n c_n^2 \quad (49)$$

其中使用了基函数  $\{\psi_n(t)\}$  的完备性和正交性。

式 (45) 中的展开是一个正则变换  $\tilde{\xi}(t) \rightarrow c_n$ 。更重要的是, 该展开实际上是用一组正交函数对可能的历史进行的参数化, 它可以用来定义有单位 Jacobian 的积分测度

$$D\tilde{\xi} = \mathcal{N} \prod_n \frac{dc_n}{\sqrt{2\pi}} \quad (50)$$

最后, 通过适当的解析延拓程序定义的 (形式) Gaussian 积分为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dc_n}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{i}{2} A_n c_n^2} = [-i A_n]^{-1/2} \quad (51)$$

并可将振幅写成

$$\mathcal{Z}^{(2)} = \mathcal{N} \prod_n A_n^{-1/2} \equiv \mathcal{N} (\text{Det } \hat{A})^{-1/2} \quad (52)$$

其中使用了算符行列式等于其特征值乘积的定义。因此, 通过一个归一化常数, 可以得到

$$\mathcal{Z}^{(2)} = (\det \hat{A})^{-1/2} \quad (53)$$

这样就把计算路径积分中的领头 (高斯) 涨落问题简化为计算涨落算符的行列式, 即由经典轨迹的选择定义的微分算符。接下来看看如何做到这一点。

## 2.1 解析延拓到虚时间

考虑通解析延拓到虚时间  $t \rightarrow -i\tau$  得到的相关问题是很有用的。前面看到，这个问题与统计物理学有关。现在举出一个非常有启发性的例子。

从形式上看，经过  $t \rightarrow -i\tau$  的解析延拓，时间演化算符的矩阵元变为

$$\langle q_f | e^{-\frac{i}{\hbar}H(t_f-t_i)} | q_i \rangle \rightarrow \langle q_f | e^{-\frac{1}{\hbar}H(\tau_f-\tau_i)} | q_i \rangle \quad (54)$$

选择

$$\tau_i = 0 \quad \tau_f = \beta\hbar \quad (55)$$

其中  $\beta = 1/T$ ， $T$  是温度 ( $k_B = 1$  的单位)。因此发现

$$\langle q_f, -i\beta/\hbar | q_i, 0 \rangle = \langle q_f | e^{-\beta H} | q_i \rangle \quad (56)$$

算符  $\hat{\rho}$

$$\hat{\rho} = e^{-\beta H} \quad (57)$$

是温度  $T$  时处于热平衡状态的 Hamiltonian 为  $H$  的系统的统计力学正则系综密度矩阵。

按照惯例要定义配分函数  $\mathcal{Z}$ ，

$$\mathcal{Z} = \text{tr} e^{-\beta H} \equiv \int dq \langle q | e^{-\beta H} | q \rangle \quad (58)$$

其中插入了一组  $\hat{q}$  本征态的完备集。利用上面的推导结果，可以看到配分函数  $\mathcal{Z}$  可以写成虚时间内的 (Euclidean) Feynman 路径积分，其形式为

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \int \mathcal{D}q[\tau] \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \int_0^{\beta\hbar} d\tau \left[ \frac{1}{2} m \left( \frac{\partial q}{\partial \tau} \right)^2 + V(q) \right] \right\} \\ &\equiv \int \mathcal{D}q[\tau] \exp \left\{ -\int_0^\beta d\tau \left[ \frac{m}{2\hbar^2} \left( \frac{\partial q}{\partial \tau} \right)^2 + V(q) \right] \right\} \end{aligned} \quad (59)$$

其中，在最后一个等式中，进行了重标度化  $\tau \rightarrow \tau/\hbar$ 。

由于配分函数是对态求迹，所以必须使用边界条件使初态和末态为同一状态，并对所有这些状态求和。换句话说，必须在虚时间内使用周期性边界条件：

$$q(\tau) = q(\tau + \beta) \quad (60)$$

因此，有限温度  $T$  下的量子力学系统可以用经典统计力学中的等价系统来描述，其 Hamiltonian (或能量) 为

$$\mathcal{H} = \frac{m}{2\hbar^2} \left( \frac{\partial q}{\partial \tau} \right)^2 + V(q) \quad (61)$$

它在长度为  $1/T$  的线段上，并服从周期性边界条件。这等效地意味着，这段实际上是一个长度为  $\beta = 1/T$  的环。

或者，插入 Hamiltonian 本征态的一组完备集，很容易看出密度矩阵的任意矩阵元形为

$$\begin{aligned}\langle q'|e^{-\beta H}|q\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle q'|n\rangle \langle n|q\rangle e^{-\beta E_n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n} \psi_n^*(q') \psi_n(q) \xrightarrow{\beta \rightarrow \infty} e^{-\beta E_0} \psi_0^*(q') \psi_0(q)\end{aligned}\quad (62)$$

其中  $\{E_n\}$  是 Hamiltonian 的本征值， $E_0$  是基态能量， $\psi_0(q)$  是基态波函数。

因此，可以根据密度矩阵计算出基态能量  $E_0$  和基态波函数，进一步说是根据（虚时）路径积分。例如，根据恒等式

$$E_0 = -\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \ln \text{tr} e^{-\beta H} \quad (63)$$

可以看到基态能量为

$$E_0 = -\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \ln \int_{q(0)=q(\beta)} \mathcal{D}q \exp \left\{ -\int_0^\beta d\tau \left[ \frac{m}{2\hbar^2} \left( \frac{\partial q}{\partial \tau} \right)^2 + V(q) \right] \right\} \quad (64)$$

在数学上，虚时间路径积分比实时间更好处理，因为它是一个正的量（统计权重）的求和。相比之下，Feynman 路径积分（实时）是相位之和，因此是一个不良定义的对象。它实际上是有条件收敛的，为了使其有意义，必须引入收敛因子（或正规化子）。这些收敛因子的作用实际上是产生对虚时间的解析延拓。在计算传播子时也会遇到同样的问题。因此，虚时间路径积分，通常被称为“Euclidean”路径积分（与 Minkowski 的相对），既可用于描述量子系统，也可用于统计力学系统。

最后，注意在低温  $T \rightarrow 0$  时，Euclidean 路径积分可以用类似于讨论过的（实时）Feynman 路径积分的方法来近似。主要区别在于，必须对周期为  $\beta = 1/T$  的虚时间周期轨迹求和。实际上，这种求和只能在简单系统（如谐振子）中精确得到；对于更一般的系统，必须求助于某种形式的微扰理论。这里考虑一个由动力学变量  $q$  和势能  $V(q)$  描述的物理系统，其最小值位于  $q_0 = 0$ 。为简单起见，取  $V(0) = 0$  并确定恒等式  $m\omega^2 = V''(0)$ （换句话说，将系统视为等效谐振子）。配分函数由 Euclidean 路径积分给出

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}q[\tau] \exp \left( -\frac{1}{2} \int_0^\beta \xi(\tau) \hat{A}_E \xi(\tau) d\tau \right) \quad (65)$$

其中  $\hat{A}_E$  是算符  $\hat{A}$  的虚时（或 Euclidean）版本，其为

$$\hat{A}_E = -\frac{m}{\hbar^2} \frac{d^2}{d\tau^2} + V''(q_c(\tau)) \quad (66)$$

该算符作用的函数服从周期为  $\beta$  的周期性边界条件。注意势能项符号的重要变化。因此需要再次计算泛函行列式，尽管算符现在作用于服从周期性边界条件的函数。在 fermion 理论中，边界条件变成反周期的。

## 2.2 泛函行列式

现在计算式 (52) 中给出的  $Z^{(2)}$  中的行列式。我们将在虚时间内进行计算，然后进行实时间的解析延拓。

我们希望计算

$$D = \text{Det} \left[ -\frac{m}{\hbar^2} \frac{d^2}{d\tau^2} + V''(q_c(\tau)) \right] \quad (67)$$

要求算符作用的函数空间在（虚）时间内服从特定的边界条件。我们对两种情况感兴趣：(a) 零边界条件，这对研究  $T = 0$  时的量子力学很有用；(b) 周期为  $\beta = 1/T$  的周期性边界条件。这两种情况的处理方法有些不同。

**A: 零边界条件。** 定义（实）变量  $x = \frac{\hbar}{m}\tau$ 。  $x$  的范围是区间  $[0, L]$ ，  $L = \hbar\beta/\sqrt{m}$ 。考虑 Schrödinger 算符  $-\partial^2 + W(x)$  的本征值问题，

$$(-\partial^2 + W(x))\psi(x) = \lambda\psi(x) \quad (68)$$

受边界条件  $\psi(0) = \psi(L) = 0$  的限制。形式上，行列式为

$$D = \prod_n \lambda_n \quad (69)$$

其中  $\{\lambda_n\}$  是满足给定边界条件的函数空间中算符  $-\partial^2 + W(x)$  的本征值谱。

定义辅助函数  $\psi_\lambda(x)$ ，  $\lambda$  是一个实数，不一定在算符的谱中，这样就满足了以下要求：

- 1)  $\psi_\lambda(x)$  是式 (68) 的解，且
- 2)  $\psi_\lambda(x)$  服从初始条件：  $\psi_\lambda(0) = 0$  和  $\partial_x \psi_\lambda(0) = 1$ 。

不难看出，当且仅当  $\psi_{\lambda_n}(L) = 0$  时，  $-\partial^2 + W(x)$  在  $\lambda_n$  处有一个本征值。（由于这一性质，这个过程被称为打靶法。）因此，式 (69) 的行列式  $D$  等于  $x = L$  处  $\psi_\lambda(L) = 0$  的零点之积。

现在考虑两个势  $W^{(1)}$  和  $W^{(2)}$  以及相关函数  $\psi_\lambda^{(1)}(x)$  和  $\psi_\lambda^{(2)}(x)$ 。证明

$$\frac{\text{Det} [-\partial^2 + W^{(1)}(x) - \lambda]}{\text{Det} [-\partial^2 + W^{(2)}(x) - \lambda]} = \frac{\psi_\lambda^{(1)}(L)}{\psi_\lambda^{(2)}(L)} \quad (70)$$

式 (70) 的左边是  $\lambda$  在复平面上的一个亚纯函数，在  $-\partial^2 + W^{(1)}(x) - \lambda$  的特征值处有单零点，在  $-\partial^2 + W^{(2)}(x) - \lambda$  的特征值处有单极点。此外，式 (70) 的左侧随着  $|\lambda| \rightarrow \infty$  而趋近于 1，除了沿正实轴，这也是两个算符的本征值谱所在的位置。这里假设算符的本征值是非简并的，这是一般情况。同样，式 (70) 的右边也是  $\lambda$  的一个亚纯函数，它具有与左边完全相同的零点和极点。当  $|\lambda| \rightarrow \infty$  时，它也会变为 1（同样，沿正实轴除外），

因为波函数  $\psi_\lambda$  在此极限中渐近为平面波。因此，取右侧与左侧之比形成的函数是整个复平面上的解析函数，它在  $|\lambda| \rightarrow \infty$  时趋近于 1。复变函数理论的一般定理告诉我们，这个函数在任何地方都等于 1。

综上所述，得出结论下面的比值与  $W(x)$  无关：

$$\frac{\text{Det}(-\partial^2 + W(x) - \lambda)}{\psi_\lambda(L)} \quad (71)$$

现在定义一个常数  $\mathcal{N}$  使得

$$\frac{\text{Det}(-\partial^2 + W(x))}{\psi_0(L)} = \pi \hbar \mathcal{N}^2 \quad (72)$$

那么可以写出

$$\mathcal{N} [\text{Det}(-\partial^2 + W)]^{-1/2} = [\pi \hbar \psi_0(L)]^{-1/2} \quad (73)$$

因此将行列式的计算，包括归一化常数，简化为求函数  $\psi_0(L)$ 。对于线性谐振子，这个函数就是

$$\left[ -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + m\omega^2 \right] \psi_0(x) = 0 \quad (74)$$

初始条件为  $\psi_0(0) = 0$  和  $\psi_0'(0) = 1$ 。解为

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{m\omega}} \sinh(\sqrt{m\omega}x) \quad (75)$$

因此，

$$\mathcal{Z} = \mathcal{N} \left[ \text{Det} \left( -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + m\omega^2 \right) \right]^{-1/2} = [\pi \hbar \psi_0(L)]^{-1/2} \quad (76)$$

并发现

$$\mathcal{Z} = \left[ \frac{\pi \hbar}{\sqrt{m\omega}} \sinh(\beta\omega) \right]^{-1/2} \quad (77)$$

其中使用了  $L = \hbar\beta/\sqrt{m}$ 。根据这一结果，发现基态能量为

$$E_0 = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{-1}{\beta} \ln \mathcal{Z} = \frac{\hbar\omega}{2} \quad (78)$$

这是理所应当的。

最后，通过回到实时的解析延拓，可以利用这些结果发现例如在某个时间  $T$  之后返回原点的振幅。因此，当  $t_f - t_i = T$  和  $q_f - q_i = 0$  时可以得到

$$\langle 0, T | 0, 0 \rangle = \left[ \frac{i\pi \hbar}{\sqrt{m\omega}} \sin(\omega T) \right]^{-1/2} \quad (79)$$

**B: 周期性边界条件。**周期性边界条件意味着历史满足  $q(\tau) = q(\tau + \beta)$ 。因此, 这些函数可以用 Fourier 级数展开, 其形式为

$$q(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\omega_n \tau} q_n \quad (80)$$

其中  $\omega_n = 2\pi n/\beta$ 。由于  $q(\tau)$  是实数, 就有了  $q_{-n} = q_n^*$  的约束条件。对于这样的构型 (或历史), 作用量变为

$$S = \int_0^\beta d\tau \left[ \frac{m}{2\hbar^2} \left( \frac{\partial q}{\partial \tau} \right)^2 + \frac{1}{2} V''(0) q^2 \right] = \frac{\beta}{2} V''(0) q_0^2 + \beta \sum_{n \geq 1} \left[ \frac{m}{\hbar^2} \omega_n^2 + V''(0) \right] |q_n|^2 \quad (81)$$

积分测度现在是

$$Dq[\tau] = \mathcal{N} \frac{dq_0}{\sqrt{2\pi}} \prod_{n \geq 1} \frac{d\text{Re}q_n d\text{Im}q_n}{2\pi} \quad (82)$$

其中  $\mathcal{N}$  是一个归一化常数。进行 Gaussian 积分后, 配分函数变为

$$\mathcal{Z} = \mathcal{N} \frac{1}{\sqrt{\beta V''(0)}} \prod_{n \geq 1} \frac{1}{\frac{\beta m}{\hbar^2} \omega_n^2 + \beta V''(0)} = \mathcal{N} \left[ \prod_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\frac{\beta m}{\hbar^2} \omega_n^2 + \beta V''(0)} \right]^{1/2} \quad (83)$$

从形式上看, 这个方程中的无穷个乘积是发散的。归一化常数  $\mathcal{N}$  可以消除这种发散。这就是所谓正规化的一个例子。正规化配分函数为

$$\mathcal{Z} = \sqrt{\frac{m}{\hbar^2 \beta}} \frac{1}{\sqrt{\beta V''(0)}} \prod_{n \geq 1} \left[ 1 + \frac{\hbar^2 V''(0)}{m \omega_n^2} \right]^{-1} \quad (84)$$

使用恒等式

$$\prod_{n \geq 1} \left( 1 + \frac{a^2}{n^2 \pi^2} \right) = \frac{\sinh a}{a} \quad (85)$$

发现

$$\mathcal{Z} = \frac{1}{2 \sinh \left( \frac{\beta \hbar}{2} \left( \frac{V''(0)}{m} \right)^{1/2} \right)} \quad (86)$$

这是线性谐振子的配分函数。

### 3 标量场论的路径积分

现在对标量场论发展路径积分量子化图景。出发点是正则量子化的标量场。正如我们所见, 在正则量子化中, 标量场  $\hat{\phi}(\mathbf{x})$  是一个作用于态的 Hilbert 空间的算符。我们使用场表象, 它与量子力学中的传统坐标表象类似。

因此, 基是由某个固定时间  $x_0$  时的场构型标记的, 即一组形为  $|\{\phi(\mathbf{x}, x_0)\}\rangle$  的态。场算符  $\hat{\phi}(\mathbf{x}, x_0)$  平庸地作用于这些态:

$$\hat{\phi}(\mathbf{x}, x_0) |\{\phi(\mathbf{x}, x_0)\}\rangle = \phi(\mathbf{x}, x_0) |\{\phi(\mathbf{x}, x_0)\}\rangle \quad (87)$$

态集合  $|\{\phi(\mathbf{x}, x_0)\}\rangle$  既完备又正交。这里的完备性是指这些态张成整个 Hilbert 空间。因此，完整 Hilbert 空间中的单位算符  $\hat{I}$  可以按照通常的方式在完备基上展开，对于这组基意味着

$$\hat{I} = \int D\phi(\mathbf{x}, x_0) |\{\phi(\mathbf{x}, x_0)\}\rangle \langle\{\phi(\mathbf{x}, x_0)\}\rangle \quad (88)$$

由于完备性条件是对基中所有态的求和，而这个基是给定时间  $x_0$  时的场构型的集合，因此需要定义表示场构型求和的积分测度。在这种情况下，积分测度的定义是平庸的：

$$D\phi(\mathbf{x}, x_0) = \prod_{\mathbf{x}} d\phi(\mathbf{x}, x_0) \quad (89)$$

同样，基的正交性条件是

$$\langle\{\phi(\mathbf{x}, x_0)\}|\{\phi'(\mathbf{x}, x_0)\}\rangle = \prod_{\mathbf{x}} \delta(\phi(\mathbf{x}, x_0) - \phi'(\mathbf{x}, x_0)) \quad (90)$$

这样就有了实标量场的 Hilbert 空间的可行定义。

在正则量子化中，经典正则动量  $\Pi(\mathbf{x}, x_0)$  定义为

$$\Pi(\mathbf{x}, x_0) \equiv \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_0\phi(\mathbf{x}, x_0)} = \partial_0\phi(\mathbf{x}, x_0) \quad (91)$$

成为与场  $\phi$  本身作用于同一 Hilbert 空间的算符。场算符  $\hat{\phi}(x)$  和正则动量算符  $\hat{\Pi}(x)$  满足等时正则对易关系：

$$[\hat{\phi}(\mathbf{x}, x_0), \hat{\Pi}(\mathbf{y}, x_0)] = i\hbar\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (92)$$

这里考虑一个实标量场，其 Lagrangian 密度为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu\phi)^2 - V(\phi) \quad (93)$$

将下面的内容推广到更一般的情况，如复数场和/或多个分量，是一件很简单的事情。还可以回顾一下，标量场的 Hamiltonian 为

$$\hat{H} = \int d^3x \left[ \frac{1}{2}\hat{\Pi}^2(x) + \frac{1}{2}(\nabla\hat{\phi}(x))^2 + V(\nabla\hat{\phi}(x)) \right] \quad (94)$$

由于即将明确的原因，可以在标量场的 Lagrangian 密度（式 (93)）中添加一个额外项，其形式为

$$\mathcal{L}_{\text{source}} = J(x)\phi(x) \quad (95)$$

场  $J(x)$  称为外源。场  $J(x)$  类似于作用在经典粒子系统上的外力。这里始终假设源  $J(x)$  在空间无穷远处（任何时候）以及在遥远的过去和遥远的未来都是为零的：

$$\lim_{|\mathbf{x}|\rightarrow\infty} J(\mathbf{x}, x_0) = 0 \quad \lim_{x_0\rightarrow\pm\infty} J(\mathbf{x}, x_0) = 0 \quad (96)$$

总 Lagrangian 密度为

$$\mathcal{L}(\phi, J) = \mathcal{L} + \mathcal{L}_{\text{source}} \quad (97)$$

由于源  $J(x)$  通常是空间和时间的函数，因此从这个 Lagrangian 得出的 Hamiltonian 形式上含时。

我们按照有限量子力学系统的相同步骤，推导出这个 QFT 的路径积分。因此首先考虑 Wightman 函数，它被定义为振幅

$${}_J \langle \{ \phi(\mathbf{x}, x_0) \} | \{ \phi'(\mathbf{y}, y_0) \} \rangle_J \quad (98)$$

换句话说，我们需要的是源  $J(x)$  背景下的转变振幅。感兴趣的是  $x_0$  处于遥远的未来，而  $y_0$  处于遥远的过去。事实证明这一振幅与计算 Heisenberg 表象中场算符的编时乘积的基态（或真空）期望值密切相关

$$G^{(N)}(x_1, \dots, x_N) \equiv \langle 0 | T [\hat{\phi}(x_1) \dots \hat{\phi}(x_N)] | 0 \rangle \quad (99)$$

这些被称为  $N$ -点函数（或关联函数）。特别是 2-点函数

$$G^{(2)}(x_1 - x_2) \equiv -i \langle 0 | T [\hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2)] | 0 \rangle \quad (100)$$

被称为该理论的 Feynman 传播子。所有与物理有关的量都可以从式 (100) 类型的合适的关联函数中得到。

在式 (100) 中，使用了记号  $T [\hat{\phi}(x_1) \dots \hat{\phi}(x_N)]$  表示 Heisenberg 场算符的编时乘积。对于任何一对 Heisenberg 算符  $\hat{A}(x)$  和  $\hat{B}(y)$ ，它们在类空间隔对易，它们的编时乘积定义为

$$T [\hat{A}(x) \hat{B}(y)] = \theta(x_0 - y_0) \hat{A}(x) \hat{B}(y) + \theta(y_0 - x_0) \hat{B}(y) \hat{A}(x) \quad (101)$$

其中  $\theta(x)$  是阶跃（或 Heaviside）函数：

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (102)$$

这一定义通过归纳法可推广到任意数量算符的乘积。注意在编时乘积内部，Heisenberg 算符的行为就好像它们是  $c$ -数。

现在回顾一下前面给出的量子力学路径积分的推导结构。将这一推导用于这个场论。考虑式 (98) 的振幅，并意识到这个振幅实际上是演化算符的一个矩阵元，

$${}_J \langle \{ \phi(\mathbf{x}, x_0) \} | \{ \phi'(\mathbf{y}, y_0) \} \rangle_J = \langle \{ \phi(\mathbf{x}) \} | T e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{y_0}^{x_0} dx'_0 \hat{H}(x'_0)} | \{ \phi'(\mathbf{y}) \} \rangle \quad (103)$$

其中  $T$  代表编时符号（不是温度！）， $\hat{H}(x'_0)$  是含时的 Hamiltonian，其 Hamiltonian 密度为

$$\hat{H}(x_0) = \frac{1}{2} \hat{\Pi}^2(\mathbf{x}, x_0) + \frac{1}{2} (\nabla \hat{\phi}(\mathbf{x}, x_0))^2 + V(\hat{\phi}(\mathbf{x}, x_0)) - J(\mathbf{x}, x_0) \hat{\phi}(\mathbf{x}, x_0) \quad (104)$$

套用粒子的量子力学的构造，首先将时间间隔划分为  $N$  个大量的步长，每个宽度为  $\Delta t$ ，然后插入场算符  $\hat{\phi}$  的本征态完备集，因为场扮演着坐标的角色。在这里也必须插入正则动量算符的本征态完备集，这里指正则场算符  $\hat{\Pi}(\mathbf{x})$ 。在形式上取时间连续极限  $N \rightarrow \infty$  和  $t \rightarrow 0$ ，同时保持  $N\Delta t$  不变，得到的结果是场论的相空间路径积分为

$${}_J \langle \{ \phi(\mathbf{x}, x_0) \} | \{ \phi'(\mathbf{y}, y_0) \} \rangle_J = \int_{\text{b.c.}} \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\Pi e^{\frac{i}{\hbar} \int d^4x [\dot{\phi}\Pi - \mathcal{H}(\phi, \Pi) + J\phi]} \quad (105)$$

其中“b.c.”表示边界条件，要求初态和末态分别为  $|\{ \phi(\mathbf{x}, x_0) \} \rangle$  和  $|\{ \phi'(\mathbf{y}, y_0) \} \rangle$ 。

与粒子的路径积分情况完全相同，该理论的 Hamiltonian 与正则动量  $\Pi(x)$  成二次方。因此可以进一步对场  $\Pi(x)$  进行积分，并以场构型历史的求和形式得到标量场论的 Feynman 路径积分：

$${}_J \langle \{ \phi(\mathbf{x}, x_0) \} | \{ \phi'(\mathbf{y}, y_0) \} \rangle_J = \mathcal{N} \int_{\text{b.c.}} \mathcal{D}\phi e^{\frac{i}{\hbar} S(\phi, \partial_\mu \phi, J)} \quad (106)$$

其中  $\mathcal{N}$  是（不重要的）归一化常数， $S(\phi, \partial_\mu \phi, J)$  是与源  $J(x)$  耦合的实标量场  $\phi(x)$  的作用量：

$$S(\phi, \partial_\mu \phi, J) = \int d^4x \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - V(\phi) + J\phi \right] \quad (107)$$

## 4 路径积分和传播子

在 QFT 中，我们感兴趣的是计算场算符在不同时空位置的真空（基态）期望值。因此，我们可能感兴趣的不是振幅  ${}_J \langle \{ \phi(\mathbf{x}, x_0) \} | \{ \phi'(\mathbf{y}, y_0) \} \rangle_J$ ，而是在  $y_0 \rightarrow -\infty$  处的初态即真空态  $|0\rangle$ （即没有源  $J(x)$  时标量场的基态），与在  $x_0 \rightarrow \infty$  处的终态即没有源时理论的真空态之间的过渡。将这个矩阵元表示为

$$Z[J] = {}_J \langle 0|0 \rangle_J \quad (108)$$

这个矩阵元被称为真空持续振幅。

现在看看真空持续振幅与标量场的 Feynman 路径积分即式 (106) 的关系。为此，假设源  $J(x)$  在时间  $t < t'$  之间“开启”，而我们在更长的时间间隔  $T < t < t' < T'$  上观察系统。对于这个时间间隔，现在可以利用叠加原理在中间时刻  $t$  和  $t'$  插入态的完备集，并将振幅写成以下形式：

$${}_J \langle \{ \Phi'(\mathbf{x}, T') \} | \{ \Phi(\mathbf{x}, T) \} \rangle_J = \int \mathcal{D}\phi(\mathbf{x}, t) \mathcal{D}\phi'(\mathbf{x}, t') \langle \{ \Phi'(\mathbf{x}, T') \} | \{ \phi'(\mathbf{x}, t') \} \rangle \times {}_J \langle \{ \phi'(\mathbf{x}, t') \} | \{ \phi(\mathbf{x}, t) \} \rangle_J \langle \{ \phi(\mathbf{x}, t) \} | \{ \Phi(\mathbf{x}, T) \} \rangle \quad (109)$$

矩阵元  $\langle \{ \phi(\mathbf{x}, t) \} | \{ \Phi(\mathbf{x}, T) \} \rangle$  和  $\langle \{ \Phi'(\mathbf{x}, T') \} | \{ \phi'(\mathbf{x}, t') \} \rangle$  为

$$\begin{aligned} \langle \{ \phi(\mathbf{x}, t) \} | \{ \Phi(\mathbf{x}, T) \} \rangle &= \sum_n \Psi_n[\{\phi(\mathbf{x})\}] \Psi_n^*[\{\Phi(\mathbf{x})\}] e^{-iE_n(t-T)/\hbar} \\ \langle \{ \Phi'(\mathbf{x}, T') \} | \{ \phi'(\mathbf{x}, t') \} \rangle &= \sum_m \Psi_m[\{\Phi'(\mathbf{x})\}] \Psi_m^*[\{\phi'(\mathbf{x})\}] e^{-iE_m(T'-t')/\hbar} \end{aligned} \quad (110)$$

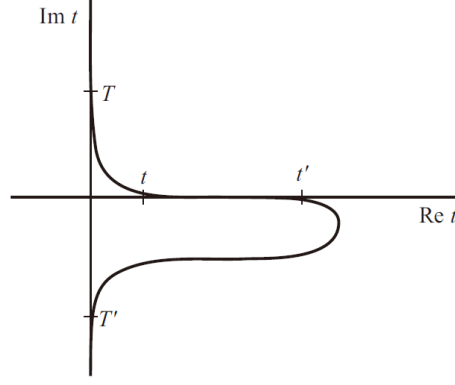


图 4: 解析延拓。

其中引入了标量场（无源）Hamiltonian 的本征态  $\{|\Psi_n\rangle\}$  的完备集以及相应的波函数  $\{\Psi_n[\Phi(\mathbf{x})]\}$ 。

在较长的时间  $T$  和  $T'$  下，这些级数展开的振荡得非常快，因此必须给出一个定义才能理解这些表达式。要理解这些表达式，必须提供相应的信息。为此，现在让我们沿正虚时间轴对  $T$  进行解析延续，并沿负虚时间轴对  $T'$  进行解析延续，如图 5.4 所示。在进行解析延续后，我们发现以下等式成立：

在长时间  $T$  和  $T'$  下，这些级数展开的振荡非常快，因此必须给出一个定义才能理解这些表达式。为此，现在沿正虚时间轴对  $T$  进行解析延拓，沿负虚时间轴对  $T'$  进行解析延拓。在进行解析延拓后，可发现以下恒等式成立：

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow +i\infty} e^{-iE_0 T/\hbar} \langle \{\phi(\mathbf{x}, t)\} | \{\Phi(\mathbf{x}, T)\} \rangle &= \Psi_0[\{\phi\}] \Psi_0^*[\{\Phi\}] e^{-iE_0 t/\hbar} \\ \lim_{T' \rightarrow -i\infty} e^{iE_0 T'/\hbar} \langle \{\Phi'(\mathbf{x}, T')\} | \{\phi(\mathbf{x}, t')\} \rangle &= \Psi_0[\{\Phi'\}] \Psi_0^*[\{\phi'\}] e^{iE_0 t'/\hbar} \end{aligned} \quad (111)$$

这一结果被称为 Gell-Mann-Low 定理。在此极限下，只要真空态  $|0\rangle$  是非简并的，激发态的贡献就会消失。这一过程等同于标准的绝热打开和关闭外部源。对非简并真空态的限制可以通过无穷弱的外部微扰来解除可能的简并性，其在取无穷时间极限之后被关闭。

因此，在同一极限中，还可发现以下关系成立：

$$\begin{aligned} &\lim_{T \rightarrow +i\infty} \lim_{T' \rightarrow -i\infty} \frac{\langle \{\Phi'(\mathbf{x}, T')\} | \{\Phi(\mathbf{x}, T)\} \rangle}{\exp[-iE_0(T' - T)/\hbar] \Psi_0^*[\{\Phi\}] \Psi_0[\{\Phi'\}]} \\ &= \int \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\Phi' \Psi_0^*[\{\phi'(\mathbf{x}, t')\}] \Psi_0[\{\phi(\mathbf{x}, t)\}]_J \langle \{\phi'(\mathbf{x}, t')\} | \{\phi(\mathbf{x}, t)\} \rangle_J \\ &\equiv_J \langle 0|0 \rangle_J \end{aligned} \quad (112)$$

式 (112) 给出了 Feynman 路径积分与真空持续振幅之间的直接关系：

$$Z[J] =_J \langle 0|0 \rangle_J = \mathcal{N} \lim_{T \rightarrow +i\infty} \lim_{T' \rightarrow -i\infty} \int \mathcal{D}\phi e^{\frac{i}{\hbar} \int_T^{T'} d^4x [\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) + J\phi]} \quad (113)$$

换句话说，在这个渐近长时极限内，无论选择哪个初态和末态，式 (98) 的振幅都与真空持续振幅  $_J \langle 0|0 \rangle_J$  相同。

因此，可以发现真空持续函数  $Z[J]$  与 Feynman 路径积分之间的直接关系，如式 (113) 所示。注意，在这个极限中，可以忽略“硬”边界条件，而使用自由边界条件。或者说，物理特性与初始条件和终止条件无关。

处于这些理由，从现在起，我们将使用更简单的表达式

$$Z[J] = {}_J \langle 0|0 \rangle_J = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi e^{\frac{i}{\hbar} \int d^4x [\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) + J\phi]} \quad (114)$$

这是一个非常有用的关系式。现在将看到  $Z[J]$  是场的编时乘积的所有真空期望值（即理论的关联函数）的生成函数（泛函）。

具体来说，我们计算一下表达式

$$\frac{1}{Z[0]} \left. \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x) \delta J(x')} \right|_{J=0} = \frac{1}{\langle 0|0 \rangle} \left. \frac{\delta^2 {}_J \langle 0|0 \rangle_J}{\delta J(x) \delta J(x')} \right|_{J=0} = \left( \frac{i}{\hbar} \right)^2 \langle 0|T[\phi(x)\phi(x')]|0 \rangle \quad (115)$$

其中  $T$  是编时符号。因此，2-点函数（即 Feynman 传播子或标量场  $\phi(x)$  的传播子）变为

$$\langle 0|T[\phi(x)\phi(x')]|0 \rangle = -i \frac{1}{\langle 0|0 \rangle} \int \mathcal{D}\phi \phi(x)\phi(x') \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[\phi, \partial_\mu \phi]\right) \quad (116)$$

同样， $N$ -点函数  $\langle 0|T[\phi(x_1)\cdots\phi(x_N)]|0 \rangle$  变为

$$\begin{aligned} \langle 0|T[\phi(x_1)\cdots\phi(x_N)]|0 \rangle &= (-i\hbar)^N \frac{1}{\langle 0|0 \rangle} \left. \frac{\delta^N {}_J \langle 0|0 \rangle_J}{\delta J(x_1)\cdots\delta J(x_N)} \right|_{J=0} \\ &= \frac{1}{\langle 0|0 \rangle} \int \mathcal{D}\phi \phi(x_1)\cdots\phi(x_N) \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[\phi, \partial_\mu \phi]\right) \end{aligned} \quad (117)$$

其中

$$Z[0] = \langle 0|0 \rangle = \int \mathcal{D}\phi \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[\phi, \partial_\mu \phi]\right) \quad (118)$$

因此发现路径积分总能得到算符编时乘积的真空期望值。因此， $Z[J]$  这个量可以看作是理论关联函数的生成泛函。这些实际上是对所有理论的路径积分都适用的一般结果。

## 5 Euclidean 时空和统计物理中的路径积分

上一节中了解了如何将转变振幅的计算与 Minkowski 时空中的路径积分联系起来，并根据初态和末态的性质规定了特定的边界条件。特别是推导出了固定边界条件下的明确表达式。

不过，也可以选择其他边界条件。例如，可以选择振幅在初始时刻从任意态开始，

在终止时刻回到相同的态，但要对所有态求和。这相同于求迹，

$$\begin{aligned} Z'[J] &= \int \mathcal{D}\Phi_J \langle \{ \Phi(\mathbf{x}, t') \} | \{ \Phi(\mathbf{x}, t) \} \rangle_J \\ &\equiv \text{Tr} T e^{-\frac{i}{\hbar} \int d^4x (\mathcal{H} - J\phi)} \\ &\equiv \int_{\text{PBC}} \mathcal{D}\phi e^{\frac{i}{\hbar} \int d^4x (\mathcal{L} + J\phi)} \end{aligned} \quad (119)$$

其中 PBC 表示在某个一般的有限时间间隔  $t'-t$  上的“周期性边界条件”， $T$  是编时符号。

现在解析延拓到虚时间  $t \rightarrow -i\tau$ （即所谓的 Wick 转动）。Wick 转动后，理论具有 Euclidean 不变性（即在  $D = d + 1$  维空间中旋转和平移）。虚时间与其他  $d$  个空间维度的作用相同。此后，我们用  $x_D$  表示虚时间，所有矢量的指标  $\mu$  从 1 到  $D$ 。

考虑两种情况：无限虚时间间隔和有限虚时间间隔。

## 5.1 无限虚时间间隔

在这种情况下，路径积分变为

$$Z'[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{-\int d^Dx (\mathcal{L}_E - J\phi)} \quad (120)$$

其中  $D$  是时空维度的总数。为了明确起见，在此讨论四维情况，但结果显然在更一般的情况下也有效。这里的  $\mathcal{L}_E$  是 Euclidean Lagrangian:

$$\mathcal{L}_E = \frac{1}{2} (\partial_0\phi)^2 + \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 + V(\phi) \quad (121)$$

式 (120) 中的路径积分有两种解释。

第一种解释是，（虚时）时间极限是无穷的，因此积分必须与真空持续振幅  ${}_J \langle 0|0 \rangle_J$  恒等。唯一不同的是，根据这种解释可以得到 Euclidean 时空（虚时）中的所有  $N$ -点函数。因此，相对论间隔为

$$x_0^2 - \mathbf{x}^2 \rightarrow -\tau^2 - \mathbf{x}^2 < 0 \quad (122)$$

这总是类空的。因此，通过这个程序可以得到其宗量的类空间隔的关联函数。为了得到类时间隔，需要做一个回到实时的解析延拓。

第二种解释是，式 (120) 中的路径积分是  $D$  维的经典统计力学系统的配分函数，其能量密度（除以  $T$ ）等于  $\mathcal{L}_E - J\phi$ 。这将是一个非常有用的联系（两种方法都是！）。

## 5.2 有限虚时间间隔

在这种情况下得到

$$0 \leq x_0 = \tau \leq \beta = 1/T \quad (123)$$

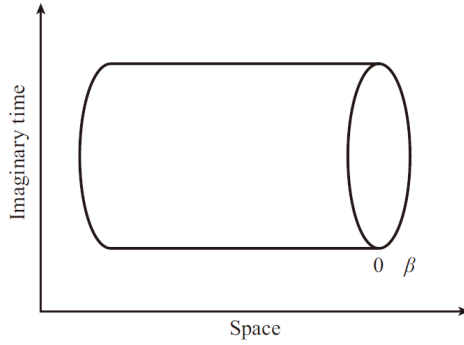


图 5: 周期性边界条件将时空卷成一个圆柱。

其中  $T$  解释为温度。实际上, 在这种情况下, 路径积分为

$$Z' [0] = \text{Tr} e^{-\beta H} \quad (124)$$

实际上是在研究有限温度  $T = 1/\beta$  下的同一 QFT 问题。路径积分再次是配分函数, 但却是量子统计物理系统的配分函数! 因此配分函数为 (设定  $\hbar = 1$  后)

$$Z' [J] = \int \mathcal{D}\phi e^{-\int_0^\beta d\tau (\mathcal{L}_E - J\phi)} \quad (125)$$

其中, 场  $\phi(\mathbf{x}, \tau)$  遵循虚时周期性边界条件:

$$\phi(\mathbf{x}, \tau) = \phi(\mathbf{x}, \tau + \beta) \quad (126)$$

这个边界条件对所有 bosonic 理论都适用。fermion 的理论在虚时间中遵守反周期边界条件。

因此, 有限温度  $T$  下的 QFT 就是 Euclidean 时空中的 QFT, 它在一个方向上是周期性的 (和有限的): 虚时间。换句话说, 我们把 Euclidean 时空卷曲 (或压缩) 成了一个周长 (圆周)  $\beta = 1/T$  的圆柱体 (单位  $\hbar = k_B = 1$ )。

虚时关联函数 (我们称之为 “Euclidean 关联函数”) 为

$$\frac{1}{Z' [J]} \left. \frac{\delta^N Z' [J]}{\delta J(x_1) \cdots J(x_N)} \right|_{J=0} = \langle \phi(x_1) \cdots \phi(x_N) \rangle \quad (127)$$

这就是统计力学等价问题中的关联函数。经过解析延拓, Euclidean 关联函数  $\langle \phi(x_1) \cdots \phi(x_N) \rangle$  与 QFT 的  $N$ -点函数的关系为

$$\langle \phi(x_1) \cdots \phi(x_N) \rangle \leftrightarrow (i\hbar)^N \langle 0 | T \phi(x_1) \cdots \phi(x_N) | 0 \rangle \quad (128)$$

对于有限温度  $T$  下的 QFT, 路径积分会产生 Heisenberg 场算符在虚时间内的关联函数。这些关联函数通常称为热关联函数 (或传播子)。它们是场的空间位置  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$  及其虚时间坐标  $x_{D1}, \dots, x_{DN}$  的函数 (此处  $x_D \equiv \tau$ )。要获得有限温度  $T$  下实数时间坐标  $x_{01}, \dots, x_{0N}$  的相关函数, 必须进行解析延拓。

## 6 自由标量场的路径积分

现在考虑自由标量场的情况。考虑 Euclidean 时空（即虚时），然后在计算结束时进行相关的解析延拓，回到实时。

与源  $J$  耦合的自由场  $\phi$  的 Euclidean Lagrangian  $\mathcal{L}_E$  为

$$\mathcal{L}_E = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - J\phi \quad (129)$$

这里使用的记号是

$$(\partial_\mu \phi)^2 = \partial_\mu \phi \partial_\mu \phi \quad (130)$$

这里的指标为  $\mu = 1, \dots, D$ ，表示  $D = d + 1$  维的 Euclidean 时空。在大多数情况下（但并非总是如此），我们会对  $d = 3$  的情况感兴趣，因此 Euclidean 空间有四维。注意 Euclidean 时空指标在式 (130) 中的位置。这并不是一个错字！

我们将精确计算 Euclidean 路径积分（或配分函数） $Z_E[J]$ 。自由场的 Euclidean 路径积分形为

$$\mathcal{Z}_E[J] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi e^{-\int d^D x \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - J\phi \right]} \quad (131)$$

在经典统计力学中，这一理论被称为 Gaussian 模型。

在下文中，假设无穷远处的场  $\phi$ （和源  $J$ ）的边界条件要么是为零，要么是周期性的，而源  $J$  在空间无穷远处也要么是零，要么是周期性的。根据这些假设，所有项的全导数都会恒为零。因此，在舍去边界项并进行分部积分后，Euclidean Lagrangian 变为

$$\mathcal{L}_E = \frac{1}{2} \phi [-\partial^2 + m^2] \phi - J\phi \quad (132)$$

由于这个作用量是场  $\phi$  的二次型，因此可以精确计算路径积分。它包含  $\phi$  的二次项（或者说双线性项）和  $\phi$  的线性项，即源项。通过以下  $\phi$  场的移动，

$$\phi(x) = \bar{\phi}(x) + \xi(x) \quad (133)$$

Lagrangian 变成

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_E &= \frac{1}{2} \phi [-\partial^2 + m^2] \phi - J\phi \\ &= \frac{1}{2} \bar{\phi} [-\partial^2 + m^2] \bar{\phi} - J\bar{\phi} + \frac{1}{2} \xi [-\partial^2 + m^2] \xi + \xi [-\partial^2 + m^2] \bar{\phi} - J\xi \end{aligned} \quad (134)$$

因此，可以通过要求移动  $\bar{\phi}$  使与  $\xi$  的线性项完全相互抵消来解耦源  $J(x)$ 。这一要求引出了一个条件，即经典场  $\bar{\phi}$  是以下非均匀偏微分方程的解：

$$[-\partial^2 + m^2] \bar{\phi} = J(x) \quad (135)$$

等价地，可以通过算符  $-\partial^2 + m^2$  的逆作用，用源  $J(x)$  来写经典场  $\bar{\phi}$ ：

$$\bar{\phi} = \frac{1}{-\partial^2 + m^2} J \quad (136)$$

式 (135) 的解是

$$\bar{\phi}(x) = \int d^D x' G_0^E(x-x') J(x') \quad (137)$$

其中

$$G_0^E(x-x') = \left\langle x \left| \frac{1}{-\partial^2 + m^2} \right| x' \right\rangle \quad (138)$$

是线性偏微分算符  $-\partial^2 + m^2$  的关联函数。因此， $G_0^E(x-x')$  是

$$[-\partial_x^2 + m^2] G_0^E(x-x') = \delta^D(x-x') \quad (139)$$

的解。

根据  $G_0^E(x-x')$ ，移动后作用量的项变为

$$\begin{aligned} & \int d^D x \left( \frac{1}{2} \bar{\phi}(x) [-\partial^2 + m^2] \bar{\phi}(x) - J \bar{\phi}(x) \right) \\ &= -\frac{1}{2} \int d^D x \bar{\phi}(x) J(x) \\ &= -\frac{1}{2} \int d^D x d^D x' J(x) G_0^E(x-x') J(x') \end{aligned} \quad (140)$$

因此，定义于式 (131) 的自由 Euclidean 标量场生成函数的路径积分  $Z_E[J]$  为

$$Z_E[J] = Z_E[0] e^{-\frac{1}{2} \int d^D x \int d^D x' J(x) G_0^E(x-x') J(x')} \quad (141)$$

其中  $Z_E[0]$  为

$$Z_E[0] = \int \mathcal{D}\xi e^{-\frac{1}{2} \int d^D x \xi(x) [-\partial^2 + m^2] \xi(x)} \quad (142)$$

式 (141) 表明，解耦之后， $Z_E[J]$  是两个因子的乘积：(1) 源  $J$  的双线性函数，以及 (2) 与源无关的路径积分  $Z_E[0]$ 。

## 6.1 $Z_E[0]$ 的计算

路径积分  $Z_E[0]$  类似于前面发现的初等量子力学中谐振子路径积分的涨落因子。在那里类似的因子可以写成微分算符的行列式，即作用量中的双线性型的核。同样的结果在这里也成立。唯一不同的是，核现在是偏微分算符  $\hat{A} = -\partial^2 + m^2$ ，而在量子力学中，它是常微分算符。在这里，算符  $\hat{A}$  也有一组本征态  $\{\Psi_n(x)\}$ ，一旦指定了时空中的边界条件，这组本征态既完备又正交。相关的本征值谱  $A_n$  为

$$\begin{aligned} & [-\partial^2 + m^2] \Psi_n(x) = A_n \Psi_n(x) \\ & \int d^D x \Psi_n(x) \Psi_m(x) = \delta_{n,m} \\ & \sum_n \Psi_n(x) \Psi_n(x') = \delta(x-x') \end{aligned} \quad (143)$$

因此可以再次在态  $\{\Psi_n(x)\}$  的完备集中展开场  $\phi(x)$ :

$$\phi(x) = \sum_n c_n \Psi_n(x) \quad (144)$$

因此场构型由系数  $\{c_n\}$  参数化。

作用量现在变成

$$S = \int d^D x \mathcal{L}_E(\phi, \partial\phi) = \frac{1}{2} \sum_n A_n c_n^2 \quad (145)$$

因此, 根据归一化系数, 可以得出  $Z_E[0]$  为

$$Z_E[0] = \prod_n A_n^{-1/2} \equiv (\text{Det}[-\partial^2 + m^2])^{-1/2} \quad (146)$$

可将  $Z_E[0]$  的计算简化为微分算符行列式  $\text{Det}[-\partial^2 + m^2]$  的计算。

目前, 有一种简单但正规的方法可以计算这种行列式。首先, 如果我们感兴趣的是一个无限系统在  $T=0$  时的行为, 那么算符  $-\partial^2 + m^2$  的本征态就是适当归一化的平面波。设  $L$  为系统的线性尺寸,  $L \rightarrow \infty$ 。然后用  $D$  维动量  $p_\mu$  标记本征函数 ( $\mu = 0, 1, \dots, d$ )

$$\Psi_p(x) = \frac{1}{(2\pi L)^{D/2}} e^{ip_\mu x_\mu} \quad (147)$$

其本征值为

$$A_p = p^2 + m^2 \quad (148)$$

因此, 行列式的对数为

$$\begin{aligned} \ln \text{Det}[-\partial^2 + m^2] &= \text{Tr} \ln[-\partial^2 + m^2] \\ &= \sum_p \ln(p^2 + m^2) \\ &= V \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \ln(p^2 + m^2) \end{aligned} \quad (149)$$

其中  $V = L^D$  是 Euclidean 时空的体积。因此

$$\ln Z_E[0] = -\frac{V}{2} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \ln(p^2 + m^2) \quad (150)$$

这个表达式有两个奇点: 红外发散和紫外发散。如式 (150) 所示,  $\ln Z[0]$  随着  $V \rightarrow \infty$  发散。这个红外奇点实际上并不是问题, 因为  $\ln Z_E[0]$  应该是一个广延量, 必须与时空的体积成比例。换句话说, 它就应该是这样的。然而, 除非存在一个允许动量的上限(或截断), 否则式 (150) 中的积分在大动量处会发散。这就是紫外奇点。它与基态能量的紫外发散有着相同的起源。事实上,  $Z_E[0]$  与基态(真空)能量密切相关, 因为

$$Z_E[0] = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \sum_n e^{-\beta E_n} \sim e^{-\beta E_0} + \dots \quad (151)$$

因此,

$$E_0 = -\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \ln Z_E[0] = \frac{1}{2} L^d \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \ln(p^2 + m^2) \quad (152)$$

其中  $L^d$  是空间体积,  $V = L^d \beta$ 。注意式 (152) 是紫外发散的。

## 6.2 传播子和关联函数

通过直接检验式 (141) 可以立即发现一些有趣的结果。不难发现, 一旦令  $J = 0$ , 关联函数  $G_E^{(0)}(x - x')$ ,

$$G_E^{(0)}(x - x') = \left\langle x \left| \frac{1}{-\partial^2 + m^2} \right| x' \right\rangle \quad (153)$$

等于该理论的 2-点相关函数 ( $J = 0$  时):

$$\langle \phi(x) \phi(x') \rangle = \frac{1}{Z_E[0]} \frac{\delta^2 Z_E[J]}{\delta J(x) \delta J(x')} \Bigg|_{J=0} = G_E^{(0)}(x - x') \quad (154)$$

同理可发现, 对于自由场理论,  $N$ -点相关函数  $\langle \phi(x_1) \cdots \phi(x_N) \rangle$  等于

$$\begin{aligned} \langle \phi(x_1) \cdots \phi(x_N) \rangle &= \frac{1}{Z_E[0]} \frac{\delta^N Z_E[J]}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_N)} \Bigg|_{J=0} \\ &= \langle \phi(x_1) \phi(x_2) \rangle \cdots \langle \phi(x_{N-1}) \phi(x_N) \rangle + \text{置换} \end{aligned} \quad (155)$$

因此, 对于自由场, 由于坐标  $x_1, \dots, x_N$  的置换,  $N$ -点函数可以简化为 2-点函数的乘积之和。因此,  $N$  必须是正偶整数。式 (155) 是在自由标量场论中推导出来的结果, 实际上它的意义要广泛得多。它被称为 Wick 定理。它适用于所有自由理论, 即 Lagrangians 是场的双线性的理论。它与统计无关, 也与是否存在相对论不变性无关。唯一需要注意的是, 对于 fermion 理论, 求和中的每个项都有一个符号。

不难看出, 当  $N = 2k$  时, 求和中的项的总数为

$$(2k - 1)(2k - 3) \cdots = \frac{(2k)!}{2^k k!} \quad (156)$$

在式 (155) 中, 每个 2-点函数  $\langle \phi(x_1) \phi(x_2) \rangle$  都是自由传播子。它也被称为收缩。通常使用记号

$$\langle \phi(x_1) \phi(x_2) \rangle = \overline{\phi(x_1) \phi(x_2)} \quad (157)$$

来表示收缩或传播子。

## 6.3 传播子的计算

现在来计算无限 Euclidean 空间的 2-点函数或传播子  $G_E^{(0)}(x - x')$ 。这是 QFT 在  $T = 0$  时感兴趣的情况。

式 (139) 告诉我们,  $G_E^{(0)}(x - x')$  是算符  $-\partial^2 + m^2$  的 Green 函数。使用 Fourier 变换方法, 将  $G_E^{(0)}(x - x')$  写成以下形式

$$G_E^{(0)}(x - x') = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} G_0^E(p) e^{ip_\mu(x_\mu - x'_\mu)} \quad (158)$$

如果

$$G_E^{(0)}(p) = \frac{1}{p^2 + m^2} \quad (159)$$

则其为式 (139) 的解。因此，实际 (Euclidean!) 空间中的关联函数是积分

$$G_E^{(0)}(x - x') = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{e^{ip_\mu(x_\mu - x'_\mu)}}{p^2 + m^2} \quad (160)$$

我们会经常遇到这种类型的积分，因此，我们来详细计算一下这个积分。首先利用恒等式

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{2} \int_0^\infty d\alpha e^{-\frac{A}{2}\alpha} \quad (161)$$

其中  $A > 0$  为正实数。变量  $\alpha$  称为“Feynman-Schwinger 参数”。

现在选择  $A = p^2 + m^2$ ，并将此表达式代入式 (160)，其形为

$$G_E^{(0)}(x - x') = \frac{1}{2} \int_0^\infty d\alpha \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{-\frac{\alpha}{2}(p^2 + m^2) + ip_\mu(x_\mu - x'_\mu)} \quad (162)$$

被积函数是一个 Gaussian，积分的计算可通过移动积分变量  $p_\mu$ （即凑平方）

$$\frac{\alpha}{2}(p^2 + m^2) - ip_\mu(x_\mu - x'_\mu) = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\alpha} p_\mu - i \frac{x_\mu - x'_\mu}{\sqrt{\alpha}} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{x_\mu - x'_\mu}{\sqrt{\alpha}} \right)^2 \quad (163)$$

并利用高斯积分

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{-\frac{1}{2} \left( \sqrt{\alpha} p_\mu - i \frac{x_\mu - x'_\mu}{\sqrt{\alpha}} \right)^2} = (2\pi\alpha)^{-D/2} \quad (164)$$

完成所有这些后，可以得出以下公式

$$G_E^{(0)}(x - x') = \frac{1}{2(2\pi)^{D/2}} \int_0^\infty d\alpha \alpha^{-D/2} e^{-\frac{|x-x'|^2}{2\alpha} - \frac{1}{2}m^2\alpha} \quad (165)$$

现在定义变量  $\alpha$  的重标度化，

$$\alpha = \lambda t \quad (166)$$

由其得

$$\frac{|x - x'|^2}{2\alpha} + \frac{1}{2}m^2\alpha = \frac{|x - x'|^2}{2\lambda t} + \frac{1}{2}m^2\lambda t \quad (167)$$

如果选择

$$\lambda = \frac{|x - x'|}{m} \quad (168)$$

则指数变为

$$\frac{|x - x'|^2}{2\alpha} + \frac{1}{2}m^2\alpha = \frac{m|x - x'|}{2} \left( t + \frac{1}{t} \right) \quad (169)$$

在变量最后一次变化之后，可发现关联函数为

$$G_E^{(0)}(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^{D/2}} \left( \frac{m}{|x - x'|} \right)^{\frac{D}{2}-1} K_{\frac{D}{2}-1}(m|x - x'|) \quad (170)$$

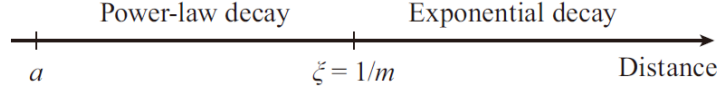


图 6: Euclidean 传播子的行为。

其中  $K_\nu(z)$  是变形 Bessel 函数，其积分表示为

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2} \int_0^\infty dt t^{\nu-1} e^{-\frac{z}{2}(t+\frac{1}{t})} \quad (171)$$

其中  $\nu = \frac{D}{2} - 1$ ， $z = m|x - x'|$ 。

有两种有趣的情况：(1) 长距离， $m|x - x'| \gg 1$ ；(2) 短距离， $m|x - x'| \ll 1$ 。

**A: 长距离行为。** 在这一区间， $z = m|x - x'| \gg 1$ ，鞍点计算表明 Bessel 函数  $K_\nu(z)$  具有渐近行为，

$$K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} [1 + O(1/z)] \quad (172)$$

因此，在这种情况下，Euclidean 传播子（或关联函数）的行为是

$$G_E^{(0)}(x - x') = \frac{\sqrt{\pi/2} m^{D-2} e^{-m|x-x'|}}{(2\pi)^{D/2} (m|x-x'|)^{\frac{D-1}{2}}} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{m|x-x'|}\right) \right] \quad (173)$$

因此，在远距离上，Euclidean（或虚时）传播子随距离（和虚时）呈指数衰减。这种衰减的长度标度是  $1/m$ ，这很自然，因为它是理论中唯一以长度为单位的量。在实时间和传统单位制中，这个长度标度就是 Compton 波长，即  $\hbar/mc$ 。在统计物理中，这个长度尺度被称为关联长度  $\xi$ 。

**B: 短距离行为。** 在这种情况下，必须使用 Bessel 函数在小宗量下的行为：

$$K_\nu(z) = \frac{\Gamma(\nu)}{2\left(\frac{z}{2}\right)^\nu} + O(1/z^{\nu-2}) \quad (174)$$

关联函数现在的行为类似于

$$G_E^{(0)}(x - x') = \frac{\Gamma\left(\frac{D}{2} - 1\right)}{4\pi^{D/2} |x - x'|^{D-2}} + \dots \quad (175)$$

其中  $\dots$  为  $m|x - x'| \rightarrow 0$  时为零的项。注意领头项与质量  $m$  无关。这就是自由无质量理论的行为。

## 6.4 Minkowski 时空中传播子的行为

寻找传播子的实时行为。现在必须解析延拓回到实时。

回想一下从 Minkowski 空间到 Euclidean 空间，做了延拓  $x_0 \rightarrow -ix_4$ 。此外，传播子的定义也有  $i$  的差异。因此，Minkowski 时空中的传播子  $G^{(0)}(x - x')$  就是解析延拓的结果：

$$G^{(0)}(x - x') = i G_E^{(0)}(x - x') \Big|_{x_4 \rightarrow ix_0} \quad (176)$$

也可以从 Minkowski 时空中的路径积分公式中得到这一结果。事实上，在  $D = (d + 1)$  维 Minkowski 时空中，自由实有质量标量场  $Z[J]$  的生成泛函为

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^D x \left[ \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 + J\phi \right]} \quad (177)$$

因此，两个场的编时乘积的期望值为

$$\langle 0|T\phi(x)\phi(y)|0\rangle = - \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)\delta J(y)} \Big|_{J=0} \quad (178)$$

相反，对于自由场，其生成函数为（利用归一化常数  $\mathcal{N}$ ）

$$Z[J] = \mathcal{N} [\text{Det}(\partial^2 + m^2)]^{-1/2} e^{\frac{i}{2} \int d^D x \int d^D y J(x) G^{(0)}(x-y) J(y)} \quad (179)$$

其中  $G^{(0)}(x - y)$  是 Klein-Gordon 算符的 Green 函数，满足

$$(\partial^2 + m^2) G^{(0)}(x - y) = \delta^D(x - y) \quad (180)$$

因此得到预期的结果：

$$\langle 0|T\phi(x)\phi(y)|0\rangle = -i G^{(0)}(x - y) \quad (181)$$

从  $D = 4$  Euclidean 传播子出发，通过解析延拓计算  $D = 4$  Minkowski 时空中的传播子。相对论间隔  $s$  为

$$s^2 = (x_0 - x'_0)^2 - (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2 \quad (182)$$

Euclidean 间隔（长度） $|x - x'|$  和相对论间隔  $s$  的关系是

$$|x - x'| = \sqrt{(x - x')^2} \rightarrow \sqrt{-s^2} \quad (183)$$

因此，在  $D = 4$  维时空中，Minkowski 空间传播子为

$$G^{(0)}(x - x') = \frac{i}{4\pi^2} \frac{m}{\sqrt{-s^2}} K_1(m\sqrt{-s^2}) \quad (184)$$

下面需要 Bessel 函数  $K_1(z)$  的渐近行为，

$$\begin{aligned} K_1(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left[ 1 + \frac{3}{8z} + \dots \right] && \text{对于 } z \gg 1 \\ K_1(z) &= \frac{1}{z} + \frac{z}{2} \left( \ln z + C - \frac{1}{2} \right) + \dots && \text{对于 } z \ll 1 \end{aligned} \quad (185)$$

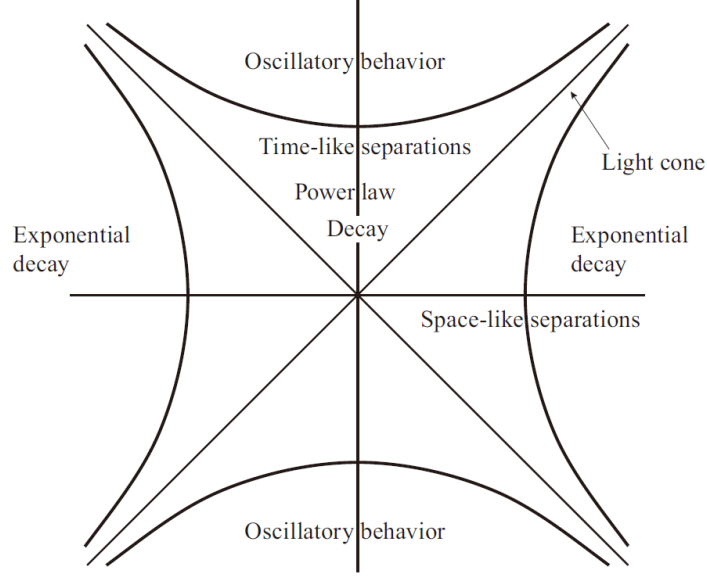


图 7: Minkowski 时空中传播子的行为。

其中  $C = 0.577215 \dots$  是 Euler-Mascheroni 常数。来看式 (184) 在以下两种情况下的表现：  
(1) 类空,  $s^2 < 0$ ; (2) 类时,  $s^2 > 0$ 。

**A: 类空间隔:**  $(x - x')^2 = s^2 < 0$ 。这是类空域。通过观察式 (184), 可以发现对于类空间隔, 因子  $\sqrt{-s^2}$  是一个正实数。因此, Bessel 函数的宗量是实数 (而且是正数), 传播子是纯虚的。尤其可以看到, 当  $s^2 < 0$  时, Minkowski 传播子本质上就是 Euclidean 关联函数:

$$G^{(0)}(x - x') = iG_E^{(0)}(x - x') \quad \text{对于 } s^2 < 0 \quad (186)$$

因此, 当  $s^2 < 0$  时, 得到渐近行为:

$$G^{(0)}(x - x') = i \frac{\sqrt{\pi/2}}{4\pi^2} \frac{m^2}{(m\sqrt{-s^2})^{3/2}} e^{-m\sqrt{-s^2}} \quad \text{对于 } m\sqrt{-s^2} \gg 1 \quad (187)$$

$$G^{(0)}(x - x') = \frac{i}{4\pi^2 (-s^2)} \quad \text{对于 } m\sqrt{-s^2} \ll 1$$

**B: 类时间隔:**  $(x - x')^2 = s^2 > 0$ 。这是类时域。解析延拓得到

$$G^{(0)}(x - x') = \frac{m}{4\pi^2 \sqrt{s^2}} K_1(im\sqrt{s^2}) \quad (188)$$

对于纯虚宗量, Bessel 函数  $K_1(iz)$  是 Hankel 函数的解析延拓,  $K_1(iz) = -\frac{\pi}{2} H_1^{(1)}(-z)$ 。该函数在其宗量值较大时是振荡的。事实上, 可以得到以下行为

$$G^{(0)}(x - x') = \frac{\sqrt{\pi/2}}{4\pi^2} \frac{m^2}{(m\sqrt{s^2})^{3/2}} e^{im\sqrt{s^2}} \quad \text{对于 } m\sqrt{s^2} \gg 1 \quad (189)$$

$$G^{(0)}(x - x') = \frac{1}{4\pi^2 s^2} \quad \text{对于 } m\sqrt{s^2} \ll 1$$

注意，除了因子  $i$ ，类时和类空的短距离行为是相同的。主要区别在于大的类时间隔下，得到的是振荡行为，而不是指数衰减。振荡的长度尺度再次由理论中唯一的尺度确定：Compton 波长。

## 7 指数衰减和质量能隙

在较长的类空间隔下的指数衰减（以及在较长的类时间隔下的振荡行为）并不是自由场理论的特殊现象。它是谱中存在质量能隙的一般结果。可以通过考虑一般理论的 2-点函数（为简单起见，在虚时间内）来了解这一点。2-点函数为

$$G^{(2)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', \tau - \tau') = \langle 0 | T \hat{\phi}(\mathbf{x}, \tau) \hat{\phi}(\mathbf{x}', \tau') | 0 \rangle \quad (190)$$

其中  $T$  是虚编时算符。

虚时的算符  $\hat{\phi}$  的 Heisenberg 表象为 ( $\hbar = 1$ ):

$$\hat{\phi}(\mathbf{x}, \tau) = e^{H\tau} \hat{\phi}(\mathbf{x}, 0) e^{-H\tau} \quad (191)$$

因此，可以将 2-点函数写成

$$\begin{aligned} G^{(2)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', \tau - \tau') &= \theta(\tau - \tau') \langle 0 | e^{H\tau} \hat{\phi}(\mathbf{x}, 0) e^{-H(\tau - \tau')} \hat{\phi}(\mathbf{x}', 0) e^{-H\tau'} | 0 \rangle \\ &\quad + \theta(\tau' - \tau) \langle 0 | e^{H\tau'} \hat{\phi}(\mathbf{x}', 0) e^{-H(\tau' - \tau)} \hat{\phi}(\mathbf{x}, 0) e^{-H\tau} | 0 \rangle \\ &= \theta(\tau - \tau') e^{E_0(\tau - \tau')} \langle 0 | \hat{\phi}(\mathbf{x}, 0) e^{-H(\tau - \tau')} \hat{\phi}(\mathbf{x}', 0) | 0 \rangle \\ &\quad + \theta(\tau' - \tau) e^{E_0(\tau' - \tau)} \langle 0 | \hat{\phi}(\mathbf{x}', 0) e^{-H(\tau' - \tau)} \hat{\phi}(\mathbf{x}, 0) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (192)$$

现在插入 Hamiltonian  $\hat{H}$  的一组本征态完备集  $\{|n\rangle\}$ ，其本征值为  $\{E_n\}$ 。现在的 2-点函数为

$$\begin{aligned} G^{(2)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', \tau - \tau') &= \theta(\tau - \tau') \sum_n \langle 0 | \hat{\phi}(\mathbf{x}, 0) | n \rangle \langle n | \hat{\phi}(\mathbf{x}', 0) | 0 \rangle e^{-(E_n - E_0)(\tau - \tau')} \\ &\quad + \theta(\tau' - \tau) \sum_n \langle 0 | \hat{\phi}(\mathbf{x}', 0) | n \rangle \langle n | \hat{\phi}(\mathbf{x}, 0) | 0 \rangle e^{-(E_n - E_0)(\tau' - \tau)} \end{aligned} \quad (193)$$

因为

$$\hat{\phi}(\mathbf{x}, 0) = e^{i\hat{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{x}} \hat{\phi}(0, 0) e^{-i\hat{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{x}} \quad (194)$$

且在平移不变的系统中，Hamiltonian 的本征态也是总动量  $\mathbf{P}$  的本征态，

$$\hat{\mathbf{P}} |0\rangle = 0 \quad \hat{\mathbf{P}} |n\rangle = \mathbf{P}_n |n\rangle \quad (195)$$

其中  $\mathbf{P}_n$  是态  $|n\rangle$  的线动量，可以写成

$$\langle 0 | \hat{\phi}(\mathbf{x}, 0) | n \rangle \langle n | \hat{\phi}(\mathbf{x}', 0) | 0 \rangle = \left| \langle 0 | \hat{\phi}(0, 0) | n \rangle \right|^2 e^{-i\mathbf{P}_n \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \quad (196)$$

利用上述表达式，可以将式 (193) 改写为以下形式

$$G^{(2)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', \tau - \tau') = \sum_n \left| \langle 0 | \hat{\phi}(0, 0) | n \rangle \right|^2 \left[ \theta(\tau - \tau') e^{-i\mathbf{P}_n \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} e^{-(E_n - E_0)(\tau - \tau')} \right. \\ \left. + \theta(\tau' - \tau) e^{-i\mathbf{P}_n \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x})} e^{-(E_n - E_0)(\tau' - \tau)} \right] \quad (197)$$

因此，在相同位置  $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ ，可以在虚时间间隔  $\tau - \tau'$  中得到以下更简单的表达式：

$$G^{(2)}(0, \tau - \tau') = \sum_n \left| \langle 0 | \hat{\phi}(0, 0) | n \rangle \right|^2 \times e^{-(E_n - E_0)|\tau - \tau'|} \quad (198)$$

在大的虚时间间隔极限下， $|\tau - \tau'| \rightarrow \infty$ ，求和中总会有一个最大的非零项。这就是通过场算符  $\hat{\phi}$  与真空态  $|0\rangle$  混合的  $|n_0\rangle$  态的项，它具有最低的激发能，即质量能隙  $E_{n_0} - E_0$ 。因此，对于大的虚时间间隔， $|\tau - \tau'| \rightarrow \infty$ ，2-点函数呈指数衰减，

$$G^{(2)}(0, \tau - \tau') \simeq |\langle 0 | \hat{\phi}(0, 0) | n_0 \rangle|^2 \times e^{-(E_{n_0} - E_0)|\tau - \tau'|} \quad (199)$$

这是在式 (173) 中已经推导出的自由场的结果。因此，如果谱存在能隙，关联函数（或传播子）就会在虚时间内呈指数衰减。在实时间内，将得到振荡行为。这是一个非常普遍的结果。

最后，注意 Minkowski 时空（实时）的 Lorentz 不变性意味着虚时的旋转 (Euclidean) 不变性。因此，在相同位置在虚时的指数衰减，必然意味着（在一般情况下）在实空间在相同虚时间的指数衰减。因此，在 Lorentz 不变的系统中，类空间隔的传播子总是等于虚时间中的传播子。

## 8 有限温度下的标量场

现在简要讨论自由标量场在有限温度  $T$  下热平衡时的行为。

在前面看到，场论现在定义在 Euclidean 圆柱时空上，其沿虚时间方向是有限的和周期性的，圆周长  $\beta = 1/T$ ，其中  $T$  是温度（Boltzmann 常数设为  $k_B = 1$ ）。因此虚时间维度已紧致化。

### 8.1 自由能

从计算自由能开始。我们将在  $D = d + 1$  个 Euclidean 时空维度进行计算。配分函数  $Z(T)$  的计算使用式 (146) 的结果，只是微分算符现在是

$$\hat{A} = -\partial_\tau^2 - \partial^2 + m^2 \quad (200)$$

此外，需要注意的是  $\partial^2$  表示只作用于空间坐标  $\mathbf{x}$  的 Laplacian 算符，虚时是周期性的。这个 Euclidean（圆柱）空间中的场的模式展开为

$$\phi(\mathbf{x}, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \phi(\omega_n, \mathbf{p}) e^{i\omega_n \tau + i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \quad (201)$$

其中  $\omega_n = 2\pi T n$  是 Matsubara 频率， $n \in \mathbb{Z}$ 。场算符在虚时间  $\tau$  内是周期性的，周期为  $\beta = 1/T$ 。现在的 Euclidean 作用量为

$$\begin{aligned} S &= \int_0^\beta d\tau \int d^d x \left[ \frac{1}{2} (\partial_\tau \phi)^2 + \frac{1}{2} (\partial \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right] \\ &= \frac{\beta}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} (\mathbf{p}^2 + m^2) |\phi_0(\mathbf{p})|^2 + \beta \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \sum_{n \geq 1} (\omega_n^2 + \mathbf{p}^2 + m^2) |\phi(\omega_n, \mathbf{p})|^2 \end{aligned} \quad (202)$$

其中作用量被拆分为零频率 Matsubara 模式的贡献，用  $\phi_0(\mathbf{p}) = \phi(0, \mathbf{p})$  表示，与其余频率模式的贡献之和。

由于自由能为  $F(T) = -T \ln Z(T)$ ，因此需要计算（相差通常的紫外发散归一化常数）

$$F(T) = \frac{T}{2} \ln \text{Det} [-\partial_\tau^2 - \partial^2 + m^2] \quad (203)$$

现在可以以算符  $-\partial_\tau^2 - \partial^2 + m^2$  的本征值展开行列式，从而得到形式上发散的表达式

$$F(T) = \frac{1}{2} VT \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln(\beta [\omega_n^2 + \mathbf{p}^2 + m^2]) \quad (204)$$

其中  $V$  是空间体积。这个表达式在动量积分和频率求和上都存在形式上的发散，需要进行正规化。在讨论量子力学的路径积分时已经遇到过这个问题。在这种情况下，可以回顾一下，有一个形式上发散的归一化常数  $\mathcal{N}$ ，在这里没有将其显式写出，但可以对其进行定义，以抵消频率求和的发散（正如在式 (84) 中所做的）。

现在可以计算正规化的频率求和：

$$F(T) = VT \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \ln \left[ \left( \beta (\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2} \right) \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{\mathbf{p}^2 + m^2}{\omega_n^2} \right) \right] \quad (205)$$

利用恒等式 (85)，自由能  $F(T)$  变为

$$F(T) = VT \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \ln \left[ 2 \sinh \left( \frac{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}}{2T} \right) \right] \quad (206)$$

可以写成

$$F(T) = V \epsilon_0 + VT \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \ln \left( 1 - e^{-\frac{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}}{T}} \right) \quad (207)$$

其中

$$\epsilon_0 = \frac{1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \quad (208)$$

是（紫外发散的）真空（基态）能量密度。注意有限温度的贡献中不存在紫外发散。

## 8.2 热传播子

热传播子是虚时间的编时传播子。它等于圆柱几何中的 Euclidean 关联函数。热传播子表示为

$$G_T^{(0)}(\mathbf{x}, \tau) = \langle \phi(\mathbf{x}, \tau) \phi(\mathbf{0}, 0) \rangle_T \quad (209)$$

它的 Fourier 展开式为

$$\langle \phi(\mathbf{x}, \tau) \phi(\mathbf{0}, 0) \rangle_T = \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\omega_n \tau + i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}}{\omega_n^2 + \mathbf{p}^2 + m^2} \quad (210)$$

其中  $\omega_n = 2\pi T n$  同样是 Matsubara 频率。

现在将得到热传播子的两个有用表达式。首先进行动量积分，就可以得到这两个表达式。Matsubara 频率是低一维的场的质量项。根据这一观察，可以将式 (210) 中的积分恒等于  $d$  个 Euclidean 维度中的无穷多个场的 Euclidean 传播子，每个场用整数  $n$  标记，其质量平方等于

$$m_n^2 = m^2 + \omega_n^2 \quad (211)$$

现在可以利用式 (170) 的结果来计算 Euclidean 关联函数（现在在  $d$  个 Euclidean 维度中），并将热传播子写成下面的级数：

$$G_T^{(0)}(\mathbf{x}, \tau) = \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega_n \tau}}{(2\pi)^{d/2}} \left( \frac{m_n}{|x - x'|} \right)^{\frac{d}{2}-1} K_{\frac{d}{2}-1}(m_n |\mathbf{x}|) \quad (212)$$

其中  $m_n$  由式 (211) 给出。由于热传播子表示为质量增大的有质量传播子的无穷级数，这意味着在与长度尺度  $\lambda_T = (2\pi T)^{-1}$ （即热波长）相比距离较大的情况下，与零 Matsubara 频率的项相比，级数中的所有项都可以忽略不计。在这一极限中，热传播子简化为  $d$ （空间）Euclidean 维度下的经典理论的关联函数：

$$G_T^{(0)}(\mathbf{x}, \tau) \simeq \langle \phi(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{0}) \rangle \quad \text{对于 } |\mathbf{x}| \gg \lambda_T \quad (213)$$

换句话说，与圆柱 Euclidean 时空的周长  $\beta$  相比，在大距离时，该理论与低一个时空维度的 Euclidean 理论渐近等效。

现在通过式 (210) 所示的 Matsubara 频率求和，找到热传播子的替代表达式。利用留数定理在复平面上以围道积分的形式表示该求和，

$$\frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega_n \tau}}{\omega_n^2 + \mathbf{p}^2 + m^2} = \frac{1}{2} \oint_{C_+ \cup C_-} \frac{dz}{2\pi i} \frac{e^{iz\tau}}{z^2 + m^2 + \mathbf{p}^2} \cot\left(\frac{z}{2T}\right) \quad (214)$$

其中复  $z$  平面上（正向）的围道  $C = C_+ \cup C_-$  如图所示。实轴上的黑点代表整数  $z = n$ ，而虚轴上的黑点代表  $\pm i\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$  处的极点。将围道  $C_+$  变形为上半平面的负向围道  $C^+$ ，将围道  $C_-$  变形为下半平面的负向围道  $C^-$ ，就可以再次利用留数定理求出积分，但现在是在虚轴上的极点。

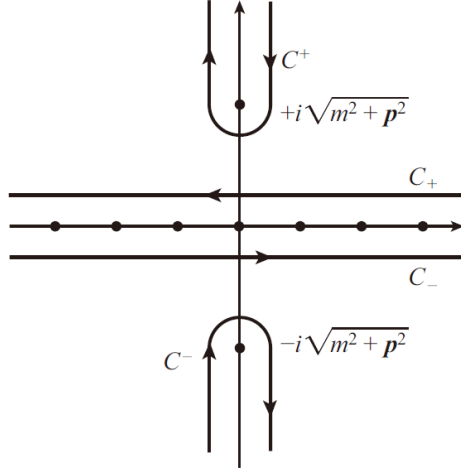


图 8: 式 (214) 的围道积分。

计算得出的热传播子结果如下

$$G_T(\mathbf{x}, \tau) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{\coth\left(\frac{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}}{2T}\right)}{2\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} e^{-|\tau|\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \quad (215)$$

该表达式适用于  $\tau \ll \beta = 1/T$  的机制，在该机制中量子涨落起主导作用。经过一些代数运算，可以把热传播子写成

$$G_T(\mathbf{x}, \tau) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{e^{-|\tau|\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}}{2\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} + \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{\exp\left(\frac{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}}{T}\right) - 1} \frac{e^{-|\tau|\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} \quad (216)$$

通过检验式 (216)，可以看到右边的第一项是  $T \rightarrow 0$  极限，它就是（应该是！） $D = d + 1$  个 Euclidean 时空维度下的传播子  $G_E^{(0)}(\mathbf{x}, \tau)$  经过对频率积分后的结果。式 (216) 右边的第二项描述了热涨落对热传播子的贡献，以 Bose 占据数的形式表示，Bose-Einstein 分布为：

$$n(\mathbf{p}, T) = \frac{1}{\exp\left(\frac{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}}{T}\right) - 1} \quad (217)$$

Bose-Einstein 分布的出现是意料之中的（事实上也是必需的），因为标量场的激发是 boson。

最后，可以找到在有限温度  $T$  下实时  $x_0$  的编时传播子，用  $G^{(0)}(\mathbf{x}, x_0; T)$  表示。通过式 (216) 中热传播子的解析延拓  $\tau \rightarrow ix_0$  可以发现

$$G^{(0)}(\mathbf{x}, x_0; T) = G_M^{(0)}(x) + \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{\exp\left(\frac{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}}{T}\right) - 1} \frac{e^{-i|x_0|\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} \quad (218)$$

其中  $G_M^{(0)}(x)$  是前面给出的  $D$  维（即零温度）的（Lorentz 不变）Minkowski 时空传播子。注意有限温度的贡献并不是 Lorentz 不变。这个结果是意料之中的，因为在有限温度下，空间和时间的作用并不等同。