

# 弦理论与 M-理论 - 2

## Bosonic 弦

Notes from K. Becker, M. Becker & J. H. Schwarz (2007)

本章介绍最简单的弦理论，即 **bosonic** 弦。尽管这个理论不切实际，也不适合唯象学，但它却是一个自然的起点。因为在分析更现实的超弦理论时，需要同样的结构和技  
术，以及一些额外。本章从经典和量子层面描述自由（非相互作用）理论。下一章将讨  
论引入和分析相互作用的各种技术。

弦可被视为  $p$ -膜的特例，即在时空中运动的  $p$  维延展物体。在这种记号中，点粒  
子对应于  $p = 0$  的情况，换句话说，就是零膜。弦（无论是基本的还是孤子的）对应  
于  $p = 1$  的情况，因此也可以称为单膜。二维延展物体或双膜通常被称为膜。事实上，  
 $p$ -膜这一名称的选择是为了暗示膜的一般性。尽管弦与高维延展物体在经典层面上有一  
些相同的性质，但它们非常特别，因为它们的二维世界体量子理论是可重整化的，而高  
维的膜却不是这样。这是一个至关重要的特性，使量子理论有可能建立在它们之上。在  
本章中将弦描述为  $p$ -膜的一种特例，并描述仅在  $p = 1$  这一特例中才成立的性质。

## 1 $p$ -膜作用量

本节利用最小作用量原理来描述  $p$ -膜在时空中的自由运动。从一个点粒子或零膜  
开始。

### 1.1 相对论性点粒子

质量为  $m$  的相对论粒子在弯曲的  $D$  维时空中的运动可以表述为一个变分问题，即  
一个作用量原理。由于点粒子的经典运动是沿测地线进行的，因此作用量应与粒子轨迹  
的不变长度成正比

$$S_0 = -\alpha \int ds \quad (1)$$

其中  $\alpha$  为常数， $\hbar = c = 1$ 。这一长度在经典理论中取极值。

如果要求作用量是无量纲的，则  $\alpha$  具有长度倒数的量纲，而其在我们的单位中等  
同于质量，因此它必须与  $m$  成正比。如果  $\alpha = m$ ，则作用量具有正确的非相对论极限，  
因此作用量变为

$$S_0 = -m \int ds \quad (2)$$

在这个式中线元为

$$ds^2 = -g_{\mu\nu}(X) dX^\mu dX^\nu \quad (3)$$

这里的  $g_{\mu\nu}(X)$ ,  $\mu, \nu = 0, \dots, D-1$ , 描述的是背景几何，选择 **Minkowski** 记号  $(- + \dots +)$ 。  
这里引入负号是为了让类时轨迹的  $ds$  为实数。粒子的轨迹  $X^\mu(\tau)$ ，也称为粒子的世界  
线，由实参数  $\tau$  参数化，但作用量与参数的选择无关。因此，作用量 (2) 形为

$$S_0 = -m \int \sqrt{-g_{\mu\nu}(X) \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu} d\tau \quad (4)$$

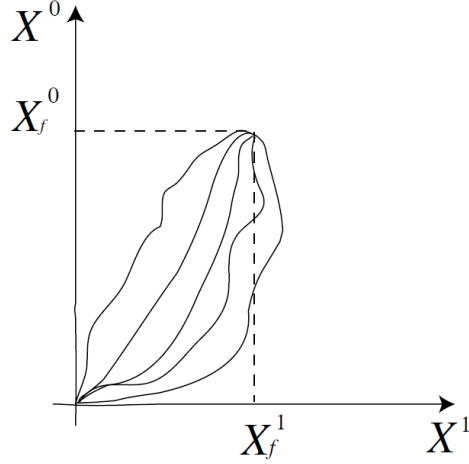


图 1: 点粒子的经典轨迹使世界线的长度最小。

其中圆点代表对  $\tau$  的导数。

作用量  $S_0$  的缺点是包含平方根，因此难以量子化。此外，这个作用量显然不能用来描述无质量粒子。要解决这些问题，可以在经典层面引入一个与前者等效的动作量，即用辅助场  $e(\tau)$  写为

$$\tilde{S}_0 = \frac{1}{2} \int d\tau \left( e^{-1} \dot{X}^2 - m^2 e \right) \quad (5)$$

其中  $\dot{X}^2 = g_{\mu\nu}(X) \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu$ 。 $\tilde{S}_0$  的重参数化不变性要求  $e(\tau)$  以适当的方式变换。令该作用量对  $e(\tau)$  的变分导数等于零，则  $e(\tau)$  的运动方程为  $m^2 e^2 + \dot{X}^2 = 0$ 。求出  $e(\tau)$  并代入  $\tilde{S}_0$  即可得到  $S_0$ 。

## 1.2 推广到 $p$ -膜作用量

作用量 (4) 可以推广到弦在时空中扫出一个二维世界面的情况，一般来说，也可以推广到  $p$ -膜在  $D$  维时空中扫出一个  $(p+1)$  维世界体的情况。当然， $p < D$  是必要条件。例如，膜或 2-膜在高维时空中移动时，会扫出一个三维世界体。

将作用量 (4) 推广到  $p$ -膜时，其形式自然是

$$S_p = -T_p \int d\mu_p \quad (6)$$

这里的  $T_p$  称为  $p$ -膜张力， $d\mu_p$  是  $(p+1)$  维体积元

$$d\mu_p = \sqrt{-\det G_{\alpha\beta}} d^{p+1}\sigma \quad (7)$$

其中诱导度规为

$$G_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu}(X) \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \quad \alpha, \beta = 0, \dots, p \quad (8)$$

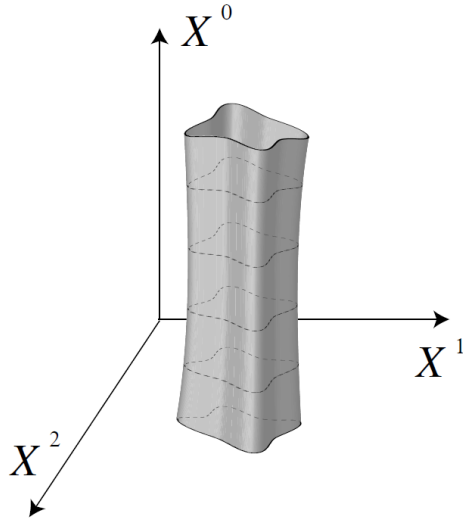


图 2: 弦的经典轨迹使世界面的面积最小。

为了写出这种作用量形式，已经考虑到  $p$ -膜世界体可以由坐标  $\sigma^0 = \tau$  和  $\sigma^i$  参数化，前者是类时坐标，后者是  $p$  个类空坐标。由于  $d\mu_p$  的单位是  $(\text{长度})^{p+1}$ ，所以  $p$ -膜张力的量纲是

$$[T_p] = (\text{长度})^{-p-1} = \frac{\text{质量}}{(\text{长度})^p} \quad (9)$$

或单位  $p$ -体积的能量。

## 2 弦作用量

本节专门讨论在平直 Minkowski 时空的  $D$  维空间中传播的弦（或单膜）的情况。当弦在时空中运动时，会扫出一个二维表面，这个二维表面被称为世界面。世界面上的点由两个坐标  $\sigma^0 = \tau$  和  $\sigma^1 = \sigma$  参数化，前者是类时坐标，后者是类空坐标。如果变量  $\sigma$  是周期性的，它描述的就是一个闭弦。如果它覆盖了一个有限的区间，那么这个弦就是开的。

### 2.1 Nambu-Goto 作用量

弦世界面的时空嵌入由函数  $X^\mu(\sigma, \tau)$  描述。描述弦在平直背景几何中传播的作用量可以作为上一节中更一般的  $p$ -膜作用量的特例得到。这个作用量称为 Nambu-Goto 作用量，其形式为

$$S_{\text{NG}} = -T \int d\sigma d\tau \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2} \quad (10)$$

其中

$$\dot{X}^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \quad X'^{\mu'} = \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} \quad (11)$$

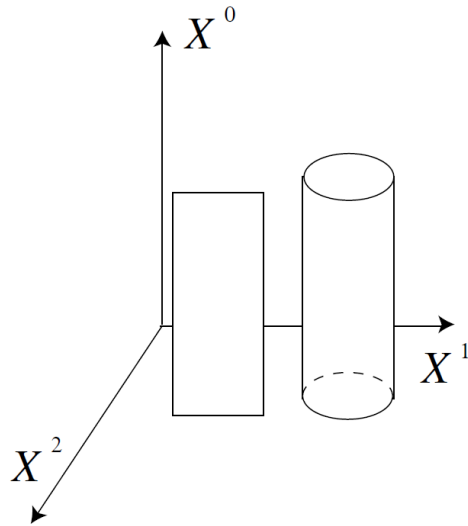


图 3: 开弦自由传播的世界面是一个矩形面，而闭弦自由传播的世界面是一个圆柱体。

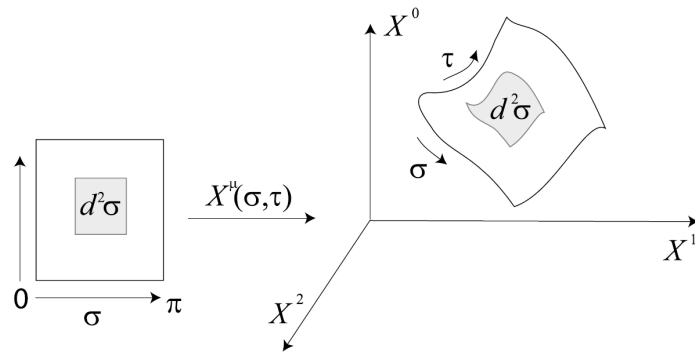


图 4: 函数  $X^\mu(\sigma, \tau)$  描述了弦世界面在时空中的嵌入。

平直时空的情况下标量积定义为  $A \cdot B = \eta_{\mu\nu} A^\mu B^\nu$ 。这一作用量中出现的积分描述了世界面的面积。因此，经典弦运动会使世界面面积最小化（或至少取极值），就像经典粒子运动是通过沿测地线运动使世界线长度取极值一样。

## 2.2 弦 sigma 模型作用量

尽管 Nambu-Goto 作用量在物理上可以很好地解释为弦世界面的面积，但由于平方根的存在，它的量子化又显得很别扭。在经典层面上，与 Nambu-Goto 作用量等价的作用量是弦 sigma 模型作用量，因为它产生了相同的运动方程。

弦 sigma 模型作用量用辅助世界面度规  $h_{\alpha\beta}(\sigma, \tau)$  表示，其作用类似于为点粒子引入的辅助场  $e(\tau)$ 。我们将使用符号  $h_{\alpha\beta}$  表示世界面度规，而  $g_{\mu\nu}$  表示时空度规。还有

$$h = \det h_{\alpha\beta} \quad h^{\alpha\beta} = (h^{-1})_{\alpha\beta} \quad (12)$$

按照相对论的惯例。在这种记号中弦 sigma 模型作用量是

$$S_\sigma = -\frac{1}{2}T \int d^2\sigma \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X \cdot \partial_\beta X \quad (13)$$

在经典层面弦 sigma 模型作用量等同于 Nambu-Goto 作用量。然而，它更便于量子化。

### 3 弦 sigma 模型作用量：经典理论

本节讨论式 (13) 中弦 sigma 模型作用量的对称性。这有助于在量子化特别简单的规范中写出弦作用量。

#### 3.1 对称性

Minkowski 时空中 bosonic 弦的弦 sigma 模型作用量有许多对称性：

**Poincaré 变换。**这些都是全局对称性，在其下，世界面场变换为

$$\delta X^\mu = a^\mu{}_\nu X^\nu + b^\mu \quad \delta h^{\alpha\beta} = 0 \quad (14)$$

这里的常数  $a^\mu{}_\nu$  ( $a_{\mu\nu} = -a_{\nu\mu}$ ) 描述的是无穷小 Lorentz 变换，而  $b^\mu$  描述的是时空平移。

**重参数化。**弦世界面是由两个坐标  $\tau$  和  $\sigma$  参数化的，但参数化的改变并不会改变作用量。事实上，变换

$$\sigma^\alpha \rightarrow f^\alpha(\sigma) = \sigma'^\alpha \quad h_{\alpha\beta}(\sigma) = \frac{\partial f^\gamma}{\partial \sigma^\alpha} \frac{\partial f^\delta}{\partial \sigma^\beta} h_{\gamma\delta}(\sigma') \quad (15)$$

使作用量保持不变。这些局部对称性也称为微分同胚。严格来说，这意味着变换及其逆变换是无穷可微的。

**Weyl 变换。**作用量在重标度化下是不变的

$$h_{\alpha\beta} \rightarrow e^{\phi(\sigma,\tau)} h_{\alpha\beta} \quad \delta X^\mu = 0 \quad (16)$$

因为  $\sqrt{-h} \rightarrow e^\phi \sqrt{-h}$  和  $h^{\alpha\beta} \rightarrow e^{-\phi} h^{\alpha\beta}$  给出了抵消因子。这种局域对称性是能量-动量张量无迹的原因。

Poincaré 变换是全局对称性，而重参数化和 Weyl 变换是局域对称性。局域对称性可用于选择一种规范，如前面讨论过的静态规范，或者使世界面度规  $h_{\alpha\beta}$  的某些分量具有特定形式的规范。

## 3.2 规范固定

前面描述的点粒子的规范固定过程可以推广到弦的情况。在这种情况下，辅助场有三个独立分量，即

$$h_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} h_{00} & h_{01} \\ h_{10} & h_{11} \end{pmatrix} \quad (17)$$

其中  $h_{10} = h_{01}$ 。

重参数化不变性允许我们选择  $h$  的两个分量，从而只保留一个独立分量。但剩下的这个分量可以通过 Weyl 重标度化下的作用量不变性加以规范排除。因此，在弦的情况下，有足够的对称性来完全规范固定  $h_{\alpha\beta}$ 。因此，辅助场  $h_{\alpha\beta}$  可以选择为

$$h_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (18)$$

实际上，只有在不存在拓扑障碍的情况下，才有可能出现这样平直的世界面度规。当世界面具有缺失的 Euler 特征时就是这种情况。例如圆柱和环面。当平直世界面度规是一种允许的规范选择时，弦作用量有简单形式

$$S = \frac{T}{2} \int d^2\sigma (\dot{X}^2 - X'^2) \quad (19)$$

目前讨论的弦作用量描述的是在平直 Minkowski 时空中的传播。在保持这一要求的前提下，可以考虑以下两个附加项，它们都是可重整化（或可超重重整化）的，并且与 Poincaré 不变性兼容，

$$S_1 = \lambda_1 \int d^2\sigma \sqrt{-h} \quad S_2 = \lambda_2 \int d^2\sigma \sqrt{-h} R^{(2)}(h) \quad (20)$$

$S_1$  是世界面上的宇宙学常数项。这个项是运动方程所不允许的。 $S_2$  项涉及  $R^{(2)}(h)$ ，即二维世界面几何的标量曲率。这种贡献会引起一些有趣的问题。现在假设可以忽略它。

## 3.3 运动方程和边界条件

### 3.3.1 运动方程

现在假设世界面拓扑允许选择一个平直世界面度规。对于自由传播的闭弦来说，自然的选择是一个无限长圆柱。同样，开弦的自然选择是无限长条。在这两种情况下，弦在 Minkowski 空间的运动都受式 (19) 中的作用量支配。这意味着  $X^\mu$  运动方程是波动方程

$$\partial_\alpha \partial^\alpha X^\mu = 0 \quad \text{或} \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) X^\mu = 0 \quad (21)$$

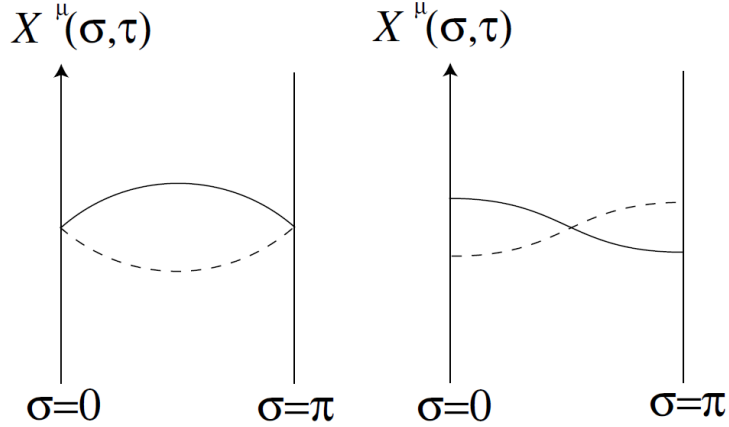


图 5: Dirichlet (左) 和 Neumann (右) 边界条件的示意图。实线和虚线代表两个不同时间的弦位置。

由于世界面上的度规已经被规范固定，能量-动量张量的消失，即世界面度规运动方程中的  $T_{\alpha\beta} = 0$ ，现在必须作为额外的约束条件施加。在规范  $h_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$  下，该张量的分量为

$$T_{01} = T_{10} = \dot{X} \cdot X' \quad T_{00} = T_{11} = \frac{1}{2} (\dot{X}^2 + X'^2) \quad (22)$$

利用  $T_{00} = T_{11}$ ，可以看到能量-动量张量的迹  $\text{Tr}T = \eta^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta} = T_{11} - T_{00}$  为零。这就是前面提到的 Weyl 不变性的结果。

### 3.3.2 边界条件

为了给出一个完全定义的变分问题，需要指定边界条件。弦可以是闭的，也可以是开的。为方便起见，选择坐标  $\sigma$  范围为  $0 \leq \sigma \leq \pi$ 。作用量的平稳点是通过要求作用量在如下位移的不变性来确定的

$$X^\mu \rightarrow X^\mu + \delta X^\mu \quad (23)$$

除了运动方程，还有边界项

$$-T \int d\tau \left[ X'_\mu \delta X^\mu \Big|_{\sigma=\pi} - X'_\mu \delta X^\mu \Big|_{\sigma=0} \right] \quad (24)$$

其必须为零。有几种不同的方法可以做到这一点。

闭弦。在这种情况下，嵌入函数是周期性的，

$$X^\mu(\sigma, \tau) = X^\mu(\sigma + \pi, \tau) \quad (25)$$

具有 Neumann 边界条件的开弦。在这种情况下，世界面边界的法向动量分量为零，即

$$X'_\mu = 0 \quad \text{于} \quad \sigma = 0, \pi \quad (26)$$

如果对所有  $\mu$  都做这样的选择，那么这些边界条件就遵守了  $D$  维 Poincaré 不变性。物理上，这意味着没有动量流经弦的两端。

**具有 Dirichlet 边界条件的开弦。**在这种情况下，两个弦末端的位置是固定的， $\delta X^\mu = 0$ ，而

$$X^\mu|_{\sigma=0} = X_0^\mu \quad X^\mu|_{\sigma=\pi} = X_\pi^\mu \quad (27)$$

其中  $X_0^\mu$  和  $X_\pi^\mu$  为常数， $\mu = 1, \dots, D - p - 1$ 。对其他  $p + 1$  个坐标施加 Neumann 边界条件。Dirichlet 边界条件破坏了 Poincaré 不变性，因此多年来一直未被考虑。但是在某些情况下，Dirichlet 边界条件是不可避免的。现代的解释是， $X_0^\mu$  和  $X_\pi^\mu$  代表  $Dp$ -膜的位置。 $Dp$ -膜是一种特殊的  $p$ -膜，基本弦可以在其上结束。除非是时空填充 ( $p = D - 1$ )，否则  $Dp$ -膜的存在会破坏 Poincaré 不变性。

### 3.3.3 运动方程的解

为了找到运动方程和约束方程的解，可以方便地引入世界面光锥坐标，其定义为

$$\sigma^\pm = \tau \pm \sigma \quad (28)$$

在这些坐标中导数和二维 Lorentz 度规的形式为

$$\partial_\pm = \frac{1}{2}(\partial_\tau \pm \partial_\sigma) \quad \begin{pmatrix} \eta_{++} & \eta_{+-} \\ \eta_{-+} & \eta_{--} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (29)$$

在光锥坐标中  $X^\mu$  的波动方程为

$$\partial_+ \partial_- X^\mu = 0 \quad (30)$$

能量-动量张量的消失变为

$$T_{++} = \partial_+ X^\mu \partial_+ X_\mu = 0 \quad (31)$$

$$T_{--} = \partial_- X^\mu \partial_- X_\mu = 0 \quad (32)$$

而  $T_{+-} = T_{-+} = 0$  表示迹自动为零。波动方程 (30) 的通解为

$$X^\mu(\sigma, \tau) = X_R^\mu(\tau - \sigma) + X_L^\mu(\tau + \sigma) \quad (33)$$

是右行子和左行子的总和。要找到  $X_R$  和  $X_L$  的明确形式，应要求  $X^\mu(\sigma, \tau)$  为实数，并施加约束条件

$$(\partial_- X_R)^2 = (\partial_+ X_L)^2 = 0 \quad (34)$$

### 3.4 闭弦模式展开

满足闭弦边界条件的波方程最一般的解为

$$X_R^\mu = \frac{1}{2}x^\mu + \frac{1}{2}l_s^2 p^\mu (\tau - \sigma) + \frac{i}{2}l_s \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-2in(\tau - \sigma)} \quad (35)$$

$$X_L^\mu = \frac{1}{2}x^\mu + \frac{1}{2}l_s^2 p^\mu (\tau + \sigma) + \frac{i}{2}l_s \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \tilde{\alpha}_n^\mu e^{-2in(\tau + \sigma)} \quad (36)$$

其中,  $x^\mu$  是质心位置,  $p^\mu$  是弦的总动量, 描述弦质心的自由运动。指数项代表弦激发模式。这里引入了一个新参数-弦长尺度  $l_s$ , 它与弦张力  $T$  和开弦 Regge 斜率参数  $\alpha'$  的关系为

$$T = \frac{1}{2\pi\alpha'} \quad \frac{1}{2}l_s^2 = \alpha' \quad (37)$$

$X_R^\mu$  和  $X_L^\mu$  是实函数的要求意味着  $x^\mu$  和  $p^\mu$  是实数, 而正模式和负模式相互共轭

$$\alpha_{-n}^\mu = (\alpha_n^\mu)^* \quad \tilde{\alpha}_{-n}^\mu = (\tilde{\alpha}_n^\mu)^* \quad (38)$$

与  $\sigma$  成线性关系的项从总和  $X_R^\mu + X_L^\mu$  中抵消, 因此闭弦边界条件确实满足了。注意展开式的导数形为

$$\partial_- X_R^\mu = l_s \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \alpha_m^\mu e^{-2im(\tau - \sigma)} \quad (39)$$

$$\partial_+ X_L^\mu = l_s \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \tilde{\alpha}_m^\mu e^{-2im(\tau + \sigma)} \quad (40)$$

其中

$$\alpha_0^\mu = \tilde{\alpha}_0^\mu = \frac{1}{2}l_s p^\mu \quad (41)$$

这些表达式在后面会用到。为了量子化该理论, 首先引入与  $X^\mu$  共轭的正则动量。其式为

$$P^\mu(\sigma, \tau) = \frac{\delta S}{\delta \dot{X}_\mu} = T \dot{X}^\mu \quad (42)$$

根据这一正则动量的定义, 经典 Poisson 括号为

$$[P^\mu(\sigma, \tau), P^\nu(\sigma', \tau)]_{\text{P.B.}} = [X^\mu(\sigma, \tau), X^\nu(\sigma', \tau)]_{\text{P.B.}} = 0 \quad (43)$$

$$[P^\mu(\sigma, \tau), X^\nu(\sigma', \tau)]_{\text{P.B.}} = \eta^{\mu\nu} \delta(\sigma - \sigma') \quad (44)$$

用  $\dot{X}^\mu$  表示为

$$\left[ \dot{X}^\mu(\sigma, \tau), X^\nu(\sigma', \tau) \right]_{\text{P.B.}} = T^{-1} \eta^{\mu\nu} \delta(\sigma - \sigma') \quad (45)$$

将  $X^\mu$  和  $\dot{X}^\mu$  的模式展开代入这些方程, 就得到了模式满足的 Poisson 括号

$$[\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu]_{\text{P.B.}} = [\tilde{\alpha}_m^\mu, \tilde{\alpha}_n^\nu]_{\text{P.B.}} = im\eta^{\mu\nu} \delta_{m+n,0} \quad (46)$$

以及

$$[\alpha_m^\mu, \tilde{\alpha}_n^\nu]_{\text{P.B.}} = 0 \quad (47)$$

## 4 正则量子化

现在可以用对易子取代 Poisson 括号来将世界面理论量子化

$$[\cdots]_{\text{P.B.}} \rightarrow i[\cdots] \quad (48)$$

这使得

$$[\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = [\tilde{\alpha}_m^\mu, \tilde{\alpha}_n^\nu] = m\eta^{\mu\nu}\delta_{m+n,0} \quad [\alpha_m^\mu, \tilde{\alpha}_n^\nu] = 0 \quad (49)$$

定义

$$a_m^\mu = \frac{1}{\sqrt{m}}\alpha_m^\mu \quad a_m^{\mu\dagger} = \frac{1}{\sqrt{m}}\alpha_{-m}^\mu \quad m > 0 \quad (50)$$

模式所满足的代数本质上是量子力学谐振子的升降算符代数

$$[a_m^\mu, a_n^{\nu\dagger}] = [\tilde{a}_m^\mu, \tilde{a}_n^{\nu\dagger}] = \eta^{\mu\nu}\delta_{m,n} \quad m, n > 0 \quad (51)$$

只有一个不寻常的特点：时间分量的对易子取负号，即，

$$[a_m^0, a_m^{0\dagger}] = -1 \quad (52)$$

这将导致负范数态，稍后将对此进行讨论。谱是通过记为  $|0\rangle$  的基态施加升算符来构建的。根据定义，基态被降算符湮灭：

$$a_m^\mu |0\rangle = 0 \quad m > 0 \quad (53)$$

还可以指定态  $|\phi\rangle$  所携带的动量  $k^\mu$ ，

$$|\phi\rangle = a_{m_1}^{\mu_1\dagger} a_{m_2}^{\mu_2\dagger} \cdots a_{m_n}^{\mu_n\dagger} |0; k\rangle \quad (54)$$

这是动量算符  $p^\mu$  的本征值，

$$p^\mu |\phi\rangle = k^\mu |\phi\rangle \quad (55)$$

需要强调的是这是一次量子化，所有这些态（包括基态）都是单粒子态。二次量子化需要弦场理论。

由偶数个时间分量算符构成的态具有正范数，而由奇数个时间分量算符构成的态具有负范数。负范数态的一个简单例子是

$$a_m^{0\dagger} |0\rangle \quad \text{范数为} \quad \langle 0| a_m^0 a_m^{0\dagger} |0\rangle = -1 \quad (56)$$

其中基态归一化为  $\langle 0|0\rangle = 1$ 。为了使理论具有物理意义，所有物理状态都必须具有正范数。在相互作用理论的物理谱中，负范数态会导致违反因果律和么正性。本章稍后将解释从物理谱中消除负范数态的方法。

## 4.1 开弦模式展开

具有 Neumann 边界条件的开弦的弦运动方程的一般解为

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x^\mu + l_s^2 p^\mu \tau + i l_s \sum_{m \neq 0} \frac{1}{m} \alpha_m^\mu e^{-im\tau} \cos(m\sigma) \quad (57)$$

注意，对于开弦，只出现一组模式  $\alpha_m^\mu$ ，而对于闭弦，有两组独立的模式  $\alpha_m^\mu$  和  $\tilde{\alpha}_m^\mu$ 。开弦边界条件迫使左行和右行模式结合成驻波。对于开弦

$$2\partial_\pm X^\mu = \dot{X}^\mu \pm X'^\mu = l_s \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m^\mu e^{-im(\tau \pm \sigma)} \quad (58)$$

其中  $\alpha_0^\mu = l_s p^\mu$ 。

## 4.2 Hamiltonian 和能量-动量张量

如上所述，弦 sigma 模型作用量在各种对称性下是不变的。

### 4.2.1 Noether 流

回想一下，Noether 提出了一种标准方法，用于构建与全局对称变换相关的守恒流  $\mathcal{J}_\alpha$

$$\phi \rightarrow \phi + \delta_\varepsilon \phi \quad (59)$$

其中  $\phi$  是理论中的任意场， $\varepsilon$  是无穷小参数。如果这种变换使运动方程不变，那么它就是理论的对称性。如果作用量最多改变一个表面项，即 Lagrangian 密度最多改变一个全导数，那么正是此情形。Noether 流就是根据上述变换下的作用量的变化确定的

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \varepsilon \partial_\alpha \mathcal{J}^\alpha \quad (60)$$

当  $\varepsilon$  为常数时，这种变化是全导数，这反映了存在全局对称性的事实。然后运动方程暗示了流守恒， $\partial_\alpha \mathcal{J}^\alpha = 0$ 。Poincaré 变换

$$\delta X^\mu = a^\mu_\nu X^\nu + b^\mu \quad (61)$$

是弦世界面理论的全局对称性。因此，它们产生了守恒的 Noether 流。应用 Noether 方法推导出与  $X^\mu$  的 Poincaré 变换相关的守恒流，可以得到

$$P_\alpha^\mu = T \partial_\alpha X^\mu \quad (62)$$

$$J_\alpha^{\mu\nu} = T (X^\mu \partial_\alpha X^\nu - X^\nu \partial_\alpha X^\mu) \quad (63)$$

其中第一个流与平移对称性有关，第二个流源于 Lorentz 变换下的不变性。

### 4.2.2 Hamiltonian

世界面时间演化是由 Hamiltonian 产生的

$$H = \int_0^\pi \left( \dot{X}_\mu P_0^\mu - \mathcal{L} \right) d\sigma = \frac{T}{2} \int_0^\pi \left( \dot{X}^2 + X'^2 \right) d\sigma \quad (64)$$

其中

$$P_0^\mu = \frac{\delta S}{\delta \dot{X}_\mu} = T \dot{X}^\mu \quad (65)$$

前面称为  $P^\mu(\sigma, \tau)$ 。代入模式展开后，闭弦 Hamiltonian 的结果是

$$H = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\alpha_{-n} \cdot \alpha_n + \tilde{\alpha}_{-n} \cdot \tilde{\alpha}_n) \quad (66)$$

而对于开弦相应的表达式是

$$H = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n \quad (67)$$

这些结果适用于经典理论。在量子理论中需要解决排序模糊的问题。

### 4.2.3 能量动量张量

现在考虑能量-动量张量的模式展开。将  $X_L$  和  $X_R$  的闭弦模式展开插入能量-动量张量式 (31) 和 (32)，可以得到

$$T_{--} = 2l_s^2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} L_m e^{-2im(\tau-\sigma)} \quad T_{++} = 2l_s^2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \tilde{L}_m e^{-2im(\tau+\sigma)} \quad (68)$$

其中 Fourier 系数是 Virasoro 生成元

$$L_m = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_{m-n} \cdot \alpha_n \quad \tilde{L}_m = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{\alpha}_{m-n} \cdot \tilde{\alpha}_n \quad (69)$$

用同样的方法，可以得到开弦的能量-动量张量模式的结果。与 Hamiltonian 比较，对闭弦可以得到表达式

$$\frac{1}{2}H = L_0 + \tilde{L}_0 = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\alpha_{-n} \cdot \alpha_n + \tilde{\alpha}_{-n} \cdot \tilde{\alpha}_n) \quad (70)$$

而对于开弦

$$H = L_0 = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n \quad (71)$$

上述结果适用于经典理论。同样，在量子理论中需要解决排序模糊的问题。

### 4.3 弦的质量公式

从经典看，能量-动量张量为零意味着所有 Fourier 模式为零

$$L_m = 0 \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (72)$$

经典约束

$$L_0 = \tilde{L}_0 = 0 \quad (73)$$

可以用来推导弦的质量表达式。相对论质量壳条件为

$$M^2 = -p_\mu p^\mu \quad (74)$$

其中  $p_\mu$  是弦的总动量。该总动量为

$$p^\mu = T \int_0^\pi d\sigma \dot{X}^\mu(\sigma) \quad (75)$$

这样在  $\dot{X}^\mu(\sigma, \tau)$  的模式展开中只有零模才有贡献。

对于开弦， $L_0$  为零则变为

$$L_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n + \frac{1}{2} \alpha_0^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n + \alpha' p^2 = 0 \quad (76)$$

这给出了弦的质量与振动模式之间的关系。对于开弦可以得到以下关系式

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n \quad (77)$$

对于闭弦必须考虑左行和右行模式，然后得到

$$M^2 = \frac{2}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{-n} \cdot \alpha_n + \tilde{\alpha}_{-n} \cdot \tilde{\alpha}_n) \quad (78)$$

这就是弦的质量壳条件，它决定了给定弦态的质量。在量子理论中这些关系略有改变。

### 4.4 Virasoro 代数

#### 4.4.1 经典理论

在经典理论中，Virasoro 生成元满足代数

$$[L_m, L_n]_{\text{P.B.}} = i(m-n)L_{m+n} \quad (79)$$

Virasoro 代数的出现是由于规范选择 (18) 并没有完全规范固定重参数化对称性。令  $\xi^\alpha$  是重参数化的无穷小参数，令  $\Lambda$  是 Weyl 重标度化的无穷小参数。那么满足以下条件的剩余的重参数化对称性

$$\partial^\alpha \xi^\beta + \partial^\beta \xi^\alpha = \Lambda \eta^{\alpha\beta} \quad (80)$$

仍保留下来。这些是重参数化，也是 Weyl 重标度化。如果定义组合  $\xi^\pm = \xi^0 \pm \xi^1$  和  $\sigma^\pm = \sigma^0 \pm \sigma^1$ ，就会发现式 (80) 的解是

$$\xi^+ = \xi^+(\sigma^+) \quad \xi^- = \xi^-(\sigma^-) \quad (81)$$

变换  $\delta\sigma^\pm = \xi^\pm$  的无穷小生成元为

$$V^\pm = \frac{1}{2} \xi^\pm(\sigma^\pm) \frac{\partial}{\partial \sigma^\pm} \quad (82)$$

并且这些变换的完备基为

$$\xi_n^\pm(\sigma^\pm) = e^{2in\sigma^\pm} \quad n \in \mathbb{Z} \quad (83)$$

相应的生成元  $V_n^\pm$  给出了 Virasoro 代数的两个副本。在开弦的情况下，只有一个 Virasoro 代数，无穷小生成元是

$$V_n = e^{in\sigma^+} \frac{\partial}{\partial \sigma^+} + e^{in\sigma^-} \frac{\partial}{\partial \sigma^-} \quad n \in \mathbb{Z} \quad (84)$$

在经典理论中度规的运动方程意味着能量-动量张量为零，即  $T_{++} = T_{--} = 0$ ，以式 (68) 的 Fourier 分量表示为

$$L_m = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_{m-n} \cdot \alpha_n = 0 \quad m \in \mathbb{Z} \quad (85)$$

在闭弦的情况下，还有相应的  $\tilde{L}_m$  条件。

#### 4.4.2 量子理论

在量子理论中，这些算符被认为是正规序的，即，

$$L_m = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} : \alpha_{m-n} \cdot \alpha_n : \quad (86)$$

根据正规序的规定，降算符总是出现在升算符的右边。特别地， $L_0$  变为

$$L_0 = \frac{1}{2} \alpha_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n \quad (87)$$

实际上，这是唯一一个正规序重要的 Virasoro 算符。由于这个表达式中可能会出现一个任意常数，因此在所有公式中，特别是在 Virasoro 代数中，都必须在  $L_0$  中加入一个常数。

利用模式  $\alpha_m^\mu$  的对易子，可以证明在量子理论中 Virasoro 生成元满足关系式

$$[L_m, L_n] = (m - n) L_{m+n} + \frac{c}{12} m (m^2 - 1) \delta_{m+n,0} \quad (88)$$

其中  $c = D$  是时空维度。与  $c$  成正比的项是量子效应。这意味着它出现在量子化之后，而在经典理论中是不存在的。这个项被称为中心展开，而  $c$  被称为中心荷，因为它可以被看作是单位算符相乘，其伴随到代数中时在扩张的代数的中心。

### 4.4.3 $SL(2, R)$ 子代数

Virasoro 代数包含一个由  $L_0$ 、 $L_1$  和  $L_{-1}$  生成的  $SL(2, \mathbb{R})$  子代数。这是熟悉的  $SU(2)$  代数的非紧致形式。正如  $SU(2)$  和  $SO(3)$  具有相同的 Lie 代数， $SL(2, \mathbb{R})$  和  $SO(2, 1)$  也具有相同的 Lie 代数。因此，在闭弦的情况下，左行和右行的完整 Virasoro 代数包含子代数  $SL(2, \mathbb{R}) \times SL(2, \mathbb{R}) = SO(2, 2)$ 。这是 Lie 代数恒等式  $SU(2) \times SU(2) = SO(4)$  的非紧致版本。

## 4.5 物理状态

如上所述，在量子理论中可能需要在  $L_0$  中加入一个常数以参数化排序规定中的任意性。因此，当施加能量-动量张量的零模应该消失的约束时，在开弦的情况下唯一的要求是存在某个常数  $a$ ，使得

$$(L_0 - a) |\phi\rangle = 0 \quad (89)$$

这里  $|\phi\rangle$  是理论中的任何物理在壳态，常数  $a$  将在后面确定。同样，对于闭弦

$$(L_0 - a) |\phi\rangle = (\tilde{L}_0 - a) |\phi\rangle = 0 \quad (90)$$

### 4.5.1 质量算符

常数  $a$  对质量算符有贡献。事实上，在量子理论中式 (89) 对应于开弦的质量壳条件

$$\alpha' M^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n - a = N - a \quad (91)$$

其中

$$N = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^\dagger \cdot a_n \quad (92)$$

为质量算符，因为它有整数本征值。对于  $N = 0$  的基态，可以得到  $\alpha' M^2 = -a$ ，而对于激发态， $\alpha' M^2 = 1 - a, 2 - a, \dots$

对于闭弦

$$\frac{1}{4}\alpha' M^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n - a = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_{-n} \cdot \tilde{\alpha}_n - a = N - a = \tilde{N} - a \quad (93)$$

#### 4.5.2 级别匹配

正规序常数  $a$  使差抵消

$$(L_0 - \tilde{L}_0) |\phi\rangle = 0 \quad (94)$$

这意味着  $N = \tilde{N}$ 。这就是 bosonic 弦的所谓级别匹配条件。这是将左行和右行模式联系起来唯一的约束条件。

#### 4.5.3 Virasoro 生成元和物理状态

在量子理论中不能要求算符  $L_m$  在所有  $m \neq 0$  的情况下湮灭所有物理状态，因为这与 Virasoro 代数不符。相反，物理状态只能被一半的 Virasoro 生成元湮灭，具体来说是

$$L_m |\phi\rangle = 0 \quad m > 0 \quad (95)$$

加上质量壳条件

$$(L_0 - a) |\phi\rangle = 0 \quad (96)$$

这是物理状态  $|\phi\rangle$  的特征。这足以给出在物理状态间对所有  $n$  为零的矩阵元  $L_n - a\delta_{n,0}$ 。因为

$$L_{-m} = L_m^\dagger \quad (97)$$

式 (95) 的 hermitian 共轭确保负模 Virasoro 算符湮灭其左侧的物理状态

$$\langle\phi| L_m = 0 \quad m < 0 \quad (98)$$

Lorentz 生成元不存在正规排序的模糊性

$$J^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^\mu \alpha_n^\nu - \alpha_{-n}^\nu \alpha_n^\mu) \quad (99)$$

因此它们可以被解释为不带任何量子修正的量子算符。利用这个表达式，可以检验出

$$[L_m, J^{\mu\nu}] = 0 \quad (100)$$

这意味着物理状态条件在 Lorentz 变换下是不变的。因此，物理状态必须以完整的 Lorentz 多重态出现。由此可见，这里讨论的形式显然是 Lorentz 协变的。

## 4.6 负范数态的消除

本节的目的是要说明只有在特定的  $a$  值和时空维度  $D$  的情况下才可能出现没有负范数态的谱。为了以协变方式进行分析，式 (88) 中的 Virasoro 代数是一个关键要素。

在量子理论中， $a$  和  $D$  的取值并不是任意的。在某些值上会出现负范数态，而在其他值上物理 Hilbert 空间是正定的。在正范数态转变为负范数态的边界处，会出现更多的零范数态。因此，为了确定  $a$  和  $D$  的允许值，一种有效的策略是寻找满足物理状态条件的零范数态。

### 4.6.1 伪态

如果一个态  $|\psi\rangle$  满足质量壳条件，并与所有物理状态正交，则该态被称为伪的

$$(L_0 - a)|\psi\rangle = 0 \quad \langle\phi|\psi\rangle = 0 \quad (101)$$

其中  $|\psi\rangle$  代表理论中的任何物理状态。伪态的一个例子是

$$|\psi\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} L_{-n} |\chi_n\rangle \quad \text{有} \quad (L_0 - a + n)|\chi_n\rangle = 0 \quad (102)$$

事实上，任何这样的态都可以用以下形式重塑

$$|\psi\rangle = L_{-1} |\chi_1\rangle + L_{-2} |\chi_2\rangle \quad (103)$$

这是 Virasoro 代数的结果（例如  $L_{-3} = [L_{-1}, L_{-2}]$ ）。此外，任何伪态都可以用这种形式表示。以这种方式定义的伪态  $|\psi\rangle$  与每个物理状态都是正交的，因为

$$\langle\phi|\psi\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle\phi|L_{-n}|\chi_n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle\chi_n|L_n|\phi\rangle^* = 0 \quad (104)$$

如果一个态  $|\psi\rangle$  是伪的并且是物理的，那么它与包括自身在内的所有物理状态都是正交的

$$\langle\psi|\psi\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle\chi_n|L_n|\psi\rangle = 0 \quad (105)$$

因此，这种态的范数为零。

### 4.6.2 $a$ 的确定

当常数  $a$  选择合适时，一类零范数伪态形为

$$|\psi\rangle = L_{-1} |\chi_1\rangle \quad (106)$$

有

$$(L_0 - a + 1) |\chi_1\rangle = 0 \quad L_m |\chi_1\rangle = 0 \quad m > 0 \quad (107)$$

要求  $|\psi\rangle$  是物理的意味着

$$L_m |\psi\rangle = (L_0 - a) |\psi\rangle = 0 \quad m = 1, 2, \dots \quad (108)$$

Virasoro 代数意味着恒等式

$$L_1 L_{-1} = 2L_0 + L_{-1} L_1 \quad (109)$$

这导致

$$L_1 |\psi\rangle = L_1 L_{-1} |\chi_1\rangle = (2L_0 + L_{-1} L_1) |\chi_1\rangle = 2(a - 1) |\chi_1\rangle = 0 \quad (110)$$

并因此  $a = 1$ 。因此， $a = 1$  是正范数物理状态和负范数物理状态之间边界特定的一部分。

### 4.6.3 确定时空维度

如果除了  $a = 1$  之外还适当选择时空维度，零范数伪态的数量就会大幅增加。为了说明这一点，构建如下形式的零范数伪态

$$|\psi\rangle = (L_{-2} + \gamma L_{-1}^2) |\tilde{\chi}\rangle \quad (111)$$

在下面确定的某个  $\gamma$  条件下，该值为零。这里如果  $|\psi\rangle$  是满足如下条件的态，则  $|\tilde{\chi}\rangle$  是伪的

$$(L_0 + 1) |\tilde{\chi}\rangle = L_m |\tilde{\chi}\rangle = 0 \quad m = 1, 2, \dots \quad (112)$$

现在施加  $|\psi\rangle$  是物理状态的条件，即  $L_1 |\psi\rangle = 0$  和  $L_2 |\psi\rangle = 0$ ，因为对  $m \geq 3$  其余约束条  $L_m |\psi\rangle = 0$  作为 Virasoro 代数的结果而被满足。首先利用以下关系式来计算条件  $L_1 |\psi\rangle = 0$

$$[L_1, L_{-2} + \gamma L_{-1}^2] = 3L_{-1} + 2\gamma L_0 L_{-1} + 2\gamma L_{-1} L_0 = (3 - 2\gamma) L_{-1} + 4\gamma L_0 L_{-1} \quad (113)$$

这导致

$$L_1 |\psi\rangle = L_1 (L_{-2} + \gamma L_{-1}^2) |\tilde{\chi}\rangle = [(3 - 2\gamma) L_{-1} + 4\gamma L_0 L_{-1}] |\tilde{\chi}\rangle \quad (114)$$

第一项在  $\gamma = 3/2$  时为零，而第二项在一般情况下为零，因为

$$L_0 L_{-1} |\tilde{\chi}\rangle = L_{-1} (L_0 + 1) |\tilde{\chi}\rangle = 0 \quad (115)$$

因此，计算  $L_1 |\psi\rangle = 0$  约束条件的结果是  $\gamma = 3/2$ 。接下来考虑  $L_2 |\psi\rangle = 0$  条件。利用

$$\left[ L_2, L_{-2} + \frac{3}{2} L_{-1}^2 \right] = 13L_0 + 9L_{-1} L_1 + \frac{D}{2} \quad (116)$$

给出

$$L_2 |\psi\rangle = L_2 \left( L_{-2} + \frac{3}{2} L_{-1}^2 \right) |\tilde{\chi}\rangle = \left( -13 + \frac{D}{2} \right) |\tilde{\chi}\rangle \quad (117)$$

因此，时空维度  $D = 26$  会产生额外的零范数伪态。

#### 4.6.4 临界 bosonic 理论

零范数伪态是不物理的。它们是伪的这一事实确保了它们与所有物理过程解耦。事实上，所有负范数态都是解耦的，所有物理态都具有正范数。因此，在满足  $a = 1$  和  $D = 26$  这两个条件时，完整的物理谱是没有负范数态的，这一点将在下一节中得到证明。 $a = 1$ 、 $D = 26$  的 bosonic 弦理论被称为临界的，临界维数为 26。在  $a \leq 1$  和  $D \leq 25$  的情况下，谱也不存在负范数态。在这种情况下理论被称为非临界的。

## 5 光锥规范量子化

如前所述，bosonic 弦即使在选择了由所有共形变换组成的规范  $h_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$  之后，仍具有残余的微分同胚对称性。因此，仍有可能做额外的规范选择。通过特定的非协变规范选择，可以描述一个明显没有负范数态的 Fock 空间，并明确地求解所有 Virasoro 条件，而不是把它们作为约束条件强加上去。

引入时空的光锥坐标

$$X^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (X^0 \pm X^{D-1}) \quad (118)$$

然后  $D$  个时空坐标  $X^\mu$  由空坐标  $X^\pm$  和  $D - 2$  个横向坐标  $X^i$  组成。在这种记号中，两个任意矢量的内积形为

$$v \cdot w = v_\mu w^\mu = -v^+ w^- - v^- w^+ + \sum_i v^i w^i \quad (119)$$

指标按如下规则升降

$$v^- = -v_+ \quad v^+ = -v_- \quad v^i = v_i \quad (120)$$

由于两个坐标的处理方式不同于其他坐标，因此在使用光锥坐标时 Lorentz 不变性不再显现。

利用残余的规范对称性可以实现哪些简化？以  $\sigma^\pm$  表示下，残余的对称性对应于式 (81) 中每个空世界面坐标的重参数化

$$\sigma^\pm \rightarrow \xi^\pm (\sigma^\pm) \quad (121)$$

这些变换对应于

$$\tilde{\tau} = \frac{1}{2} [\xi^+ (\sigma^+) + \xi^- (\sigma^-)] \quad (122)$$

$$\tilde{\sigma} = \frac{1}{2} [\xi^+ (\sigma^+) - \xi^- (\sigma^-)] \quad (123)$$

这意味着  $\tilde{\tau}$  可以是自由无质量波动方程的任意解

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) \tilde{\tau} = 0 \quad (124)$$

一旦确定了  $\tilde{\tau}$ ,  $\tilde{\sigma}$  具体化为一个常数。

在规范  $h_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$  中, 时空坐标  $X^\mu(\sigma, \tau)$  也满足二维波动方程。光锥规范利用上述残余自由度做出选择

$$X^+(\tilde{\sigma}, \tilde{\tau}) = x^+ + l_s^2 p^+ \tilde{\tau} \quad (125)$$

这相当于设置

$$\alpha_n^+ = 0 \quad \text{对于} \quad n \neq 0 \quad (126)$$

在下文中, 参数  $\tilde{\tau}$  和  $\tilde{\sigma}$  的波浪号省略。

当做出这种非协变规范选择时, 量子力学反常有可能导致 Lorentz 不变性的破坏。因此这一点需要检查。事实上, 共形不变性在进行这种规范选择的必要条件, 因此光锥规范方法中的 Lorentz 反常对应于保证显式 Lorentz 不变性的协变规范中的共形反常, 这也就不足为奇了。

光锥规范消除了  $X^+$  的振子模式。通过求解 Virasoro 约束  $(\dot{X} \pm X')^2 = 0$ , 也可以确定  $X^-$  的振子模式。在光锥规范中这些约束条件变为

$$\dot{X}^- \pm X'^- = \frac{1}{2p^+ l_s^2} (\dot{X}^i \pm X'^i)^2 \quad (127)$$

这对方程可以用来求解  $X^i$  表示下的  $X^-$ 。根据  $X^-$  的模式展开, 对于开弦其为

$$X^- = x^- + l_s^2 p^- \tau + i l_s \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^- e^{-in\tau} \cos n\sigma \quad (128)$$

解为

$$\alpha_n^- = \frac{1}{p^+ l_s} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} : \alpha_{n-m}^i \alpha_m^i : - a \delta_{n,0} \right) \quad (129)$$

因此, 在光锥规范中可以消除  $X^+$  和  $X^-$  (除了它们的零模), 用横向振子来表述理论。因此临界弦只有横向激发, 就像无质量粒子只有横向极化态一样。式 (125) 中光锥规范的方便之处在于它把 Virasoro 约束条件变成了  $X^-$  模式的线性方程。

## 5.1 质量壳条件

在光锥规范中, 开弦质量壳条件为

$$M^2 = -p_\mu p^\mu = 2p^+ p^- - \sum_{i=1}^{D-2} p_i^2 = 2(N - a) / l_s^2 \quad (130)$$

其中

$$N = \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i \quad (131)$$

现在构造光锥规范中 bosonic 弦的物理谱。

在光锥规范中所有激发都是由横向模式  $\alpha_n^i$  产生的。第一激发态由  $\alpha_{-1}^i |0; p\rangle$  给出，属于横向空间中旋转群  $SO(D-2)$  的  $(D-2)$  分量矢量表示。一般来说，Lorentz 不变性意味着物理状态对有质量态形成  $SO(D-1)$  表示，对无质量态形成  $SO(D-2)$  表示。因此，当矢量态  $\alpha_{-1}^i |0; p\rangle$  是无质量的时候，光锥规范的 bosonic 弦理论只能是 Lorentz 不变的。这立即意味着  $a = 1$ 。

在确定了  $a$  的值之后，下一个目标就是确定时空维度  $D$ 。一种启发式方法是直接计算  $L_0$  定义中出现的正规序常数。这个常数可以通过

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} : \alpha_{-n}^i \alpha_n^i : + \frac{1}{2} (D-2) \sum_{n=1}^{\infty} n \quad (132)$$

来确定。右侧的第二个求和是发散的，需要正规化。这可以通过 zeta-函数正规化来实现。首先，可以考虑一般求和

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \quad (133)$$

对任何复数  $s$  都有定义。对于  $\text{Re}(s) > 1$ ，这个求和收敛于 Riemann zeta 函数  $\zeta(s)$ 。这个 zeta 函数对  $s = -1$  有个唯一的解析延拓，其值为  $\zeta(-1) = -1/12$ 。因此，在式 (132) 中代入  $\zeta(-1)$  的值后，额外项的结果是

$$\frac{1}{2} (D-2) \sum_{n=1}^{\infty} n = -\frac{D-2}{24} \quad (134)$$

利用前面正规序常数  $a$  应等于 1 的结果，可以得到以下条件

$$\frac{D-2}{24} = 1 \quad (135)$$

这意味着  $D = 26$ 。虽然不是很严谨，但这是确定  $a$  和  $D$  的值的 fastest 方法。先前对非负范数态定理的分析也指出了  $D = 26$ 。另一种方法是证明 Lorentz 生成元满足 Lorentz 代数，这在光锥规范中并不明显。非平庸的要求是

$$[J^{i-}, J^{j-}] = 0 \quad (136)$$

一旦消除了  $\alpha_n^-$  振子， $J^{i-}$  就变成了横向振子的三次方。代数相当复杂，但底线是生成元只在  $a = 1$  和  $D = 26$  时为零。

## 5.2 谱的分析

在确定了首选值  $a = 1$  和  $D = 26$  之后，就可以确定 bosonic 弦的频谱了。

### 5.2.1 开弦

在开始的几个质量级上开弦的物理状态如下：

对于  $N = 0$ ，存在一个快子  $|0; k\rangle$ ，其质量由  $\alpha' M^2 = -1$  给出。

对于  $N = 1$ ，有一个矢量 boson  $\alpha_{-1}^i |0; k\rangle$ 。正如上一节所解释的，Lorentz 不变性要求它是无质量的。这种态给出了  $SO(24)$  的矢量表示。

$N = 2$  给出了第一种具有正 (质量)<sup>2</sup> 的态。它们是

$$\alpha_{-2}^i |0; k\rangle \quad \text{和} \quad \alpha_{-1}^i \alpha_{-1}^j |0; k\rangle \quad (137)$$

且  $\alpha' M^2 = 1$ 。它们分别有 24 和  $24 \cdot 25/2$  个态。状总数为 324，也就是  $SO(25)$  的对称无迹二阶张量表示的维数。因此，从这个意义上说，在这个质量级上谱由单个有质量的自旋-2 的态组成。

所有这些状态都具有正范数，因为它们完全由横向模式构建而成，而其描述的是一个正定的 Hilbert 空间。在光锥规范中负范数态已经解耦的事实显而易见。所有有质量的表示都可以在完整的  $SO(25)$  多态中重新排列，正如刚才对第一个有质量能级所做的。谱的 Lorentz 不变性得到了保证，因为 Lorentz 代数是在横向振子的 Hilbert 空间上实现的。

### 5.2.2 态的数量

给定质量的物理状态的总数很容易计算。例如，在开弦的情况下，根据  $a = 1$  的式 (130) 和 (131) 可以得出，质量由  $\alpha' M^2 = n - 1$  给出的物理状态  $d_n$  的数目是以下幂级数展开中  $w^n$  的系数

$$\text{tr} w^N = \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{24} \text{tr} w^{\alpha_{-n}^i \alpha_n^i} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - w^n)^{-24} \quad (138)$$

这个数字可以写成

$$d_n = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\text{tr} w^N}{w^{n+1}} dw \quad (139)$$

通过鞍点计算可以估算出大  $n$  时的物理状态数  $d_n$ 。由于鞍点出现在  $w = 1$  附近，因此可以使用近似

$$\text{tr} w^N = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - w^n)^{-24} \sim \exp\left(\frac{4\pi^2}{1-w}\right) \quad (140)$$

这是模变换公式

$$\eta(-1/\tau) = (-i\tau)^{1/2} \eta(\tau) \quad (141)$$

的近似，是对于 Dedekind eta 函数

$$\eta(\tau) = e^{i\pi\tau/12} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi in\tau}) \quad (142)$$

而言的，设  $w = e^{2\pi i\tau}$  即可看出来。然后会发现，对于大  $n$

$$d_n \sim \text{常数} \cdot n^{-27/4} \exp(4\pi\sqrt{n}) \quad (143)$$

指数因子可以用  $\exp(M/M_0)$  的形式重写，即

$$M_0 = (4\pi\sqrt{\alpha'})^{-1} \quad (144)$$

物理量  $M_0$  被称为 Hagedorn 温度。根据超出目前考虑范围的细节，它要么是最高可能温度，要么是相变温度。

### 5.2.3 闭弦

就闭弦而言，有两组模式（左行子和右行子），必须考虑级别匹配条件。谱很容易从开弦谱推导出来，因为闭弦态是左行子和右行子的张量积，每个的结构都与开弦态相同。闭弦谱中的态的质量为

$$\alpha' M^2 = 4(N - 1) = 4(\tilde{N} - 1) \quad (145)$$

闭合弦在前两个质量级的物理状态如下：

基态  $|0; k\rangle$  又是一个块子，这次是

$$\alpha' M^2 = -4 \quad (146)$$

对于  $N = 1$  级，有一组  $24^2 = 576$  个态，其形式为

$$|\Omega^{ij}\rangle = \alpha_{-1}^i \tilde{\alpha}_{-1}^j |0; k\rangle \quad (147)$$

这对应于两个无质量矢量的张量积，其中一个左行，一个右行。 $|\Omega^{ij}\rangle$  的对  $i$  和  $j$  对称且无迹的部分在  $SO(24)$  下按无质量自旋-2 的粒子变换，即引力子。迹项  $\delta_{ij} |\Omega^{ij}\rangle$  是一个无质量标量，被称为胀子。反对称部分  $|\Omega^{ij}\rangle - |\Omega^{ji}\rangle$  在  $SO(24)$  下按反对称二阶张量变换。这三种无质量态在超弦理论中都有对应，它们在超弦理论中扮演着基本的角色。