量子场论 - 3
经典对称性与守恒定律

Notes from E. Fradkin (2021)

我们把物理系统中对称性的存在作为构建其 Lagrangian 和能量泛函的指导原则。现在，我们将证明这些对称性意味着守恒定律的存在。这些对称性意味着守恒定律的存在。

对称性有不同的类型，大致可分为两类：(1) 时空对称性；(2) 内部对称性。有些对称性涉及离散算符，因此被称为离散对称性，而另一些则是连续对称性。此外，在某些理论中，这些对称性是全局对称性，而在另一些理论中，它们是局域对称性。后一类对称称为规范对称性。在完全量子化的理论中，全局对称性和局域对称性扮演着不同的角色。

时空对称性是物理学中最常见的对称性。它们包括平移不变性和旋转不变性。如果系统是孤立的，那么时间平移也是一种对称性。一般来说，非相对论系统在 Galilean 变换下是不变的，而相对论系统则是 Lorentz 不变的。其他时空对称性包括时间反演 (T)、宇称 (P) 和电荷共轭 (C)。这些对称性都是离散的。

在经典力学中，对称性的存在有着重要的影响。平移不变性（空间均匀性的结果）意味着系统总动量 $\mathbf{P}$ 的守恒。同样，各向同性意味着总角动量 $\mathbf{L}$ 的守恒，而时间平移不变性则意味着总能量 E 的守恒。

所有这些概念在场论中都有类似之处。然而，在场论中还出现了新的对称性，这些对称性在粒子的经典力学中并没有类似的概念。这就是内部对称性。

1 连续对称性和 Noether 定理

现在证明，连续对称性的存在具有非常深远的意义，比如守恒定律的存在。这些守恒定律的一个重要特征是存在局域守恒流。这就是 Emmy Noether 提出的以下定理的内容。

Noether 定理：对于每一个连续的全局对称性，都存在一个全局守恒定律。

先讨论一下局域守恒流与运动常数之间的联系。特别是证明对于每一个局域守恒流，都存在一个全局守恒量（即运动常数）。假设 $j^\mu(x)$ 是某个局域守恒流（即 $j_\mu(x)$），它满足局域约束条件

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0 \tag{1}$$

设 Ω 是时空中有界的 4-体积，边界为 $\partial\Omega$。那么散度 (Gauss) 定理告诉我们

$$0 = \int_\Omega d^4x \partial_\mu j^\mu(x) = \oint_{\partial\Omega} dS_\mu j^\mu(x) \tag{2}$$

其中，右边是取向封闭曲面 $\partial\Omega$（3-体积）上的曲面积分。假设 4-体积在空间上延伸到无穷大，而在时间 ΔT 上的范围是有限的。

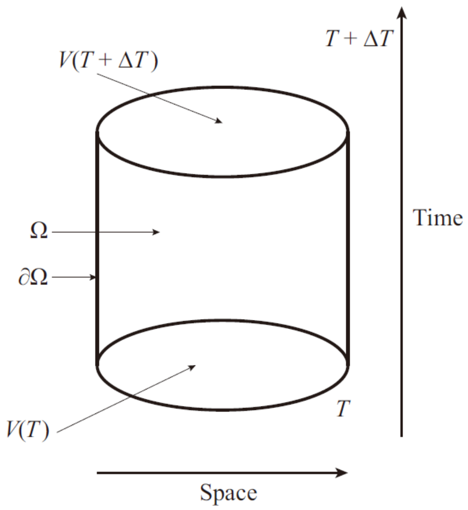

图 1: 时空 4-体积。

如果空间无穷远处没有流（即 $\lim_{|\mathbf{x}|\to\infty} j^{\mu}(\mathbf{x}, x_0) = 0$），那么只有边界 $\partial\Omega$ 的顶部（时间 $T+\Delta$）和底部（时间 T）对表面（边界）积分有贡献。因此式 (2) 的右边变为

$$0 = \int_{V(T+\Delta T)} dS_0 j^0(\mathbf{x}, T+\Delta T) - \int_{V(T)} dS_0 j^0(\mathbf{x}, T) \tag{3}$$

由于 $dS_0 \equiv d^3x$，因此边界贡献简化为两个定向 3-体积积分：

$$0 = \int_{V(T+\Delta T)} d^3x j^0(\mathbf{x}, T+\Delta T) - \int_{V(T)} d^3x j^0(\mathbf{x}, T) \tag{4}$$

因此，量 $Q(T)$

$$Q(T) \equiv \int_{V(T)} d^3x j^0(\mathbf{x}, T) \tag{5}$$

是运动常数，即

$$Q(T+\Delta T) = Q(T) \qquad \forall \Delta T \tag{6}$$

因此，满足 $\partial_\mu j^\mu = 0$ 的局域守恒流的存在意味着全局守恒荷（或 Noether 电荷）$Q = \int d^3x j^0(\mathbf{x}, T)$ 的存在，它是一个运动常数。因此，Noether 定理的证明简化为证明局域守恒流的存在。

2 内部对称性

为简单起见，先来看复标量场 $\phi(x) \neq \phi^*(x)$ 的情况。其论证很容易推广到其他情况。设 $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi, \phi^*, \partial_\mu\phi^*)$ 为 Lagrangian 密度。我们将假设 Lagrangian 在连续的全局内部对称变换下是不变的

$$\begin{aligned} \phi(x) &\mapsto \phi'(x) = e^{i\alpha}\phi(x) \\ \phi^*(x) &\mapsto \phi'^*(x) = e^{-i\alpha}\phi^*(x) \end{aligned} \tag{7}$$

其中，α 是一个任意实数（不是函数！）。如果 Lagrangian $\mathcal{L}$ 满足

$$\mathcal{L}\left(\phi', \partial_\mu \phi', \phi'^*, \partial_\mu \phi'^*\right) \equiv \mathcal{L}\left(\phi, \partial_\mu \phi, \phi^*, \partial_\mu \phi^*\right) \tag{8}$$

则系统在式 (8) 的变换下是不变的。那么可以说式 (8) 所示的变换是系统的全局对称性。

特别地，对于无穷小变换，有

$$\phi'(x) = \phi(x) + \delta\phi(x) + \cdots \qquad \phi'^*(x) = \phi^*(x) + \delta\phi^*(x) + \cdots \tag{9}$$

其中 $\delta\phi(x) = i\alpha\phi(x)$。由于 $\mathcal{L}$ 是不变的，因此它的变分必须恒等于零。变分 $\delta\mathcal{L}$ 为

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi}\delta\phi + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi}\delta\partial_\mu\phi + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi^*}\delta\phi^* + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi^*}\delta\partial_\mu\phi^* \tag{10}$$

利用运动方程

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi} - \partial_\mu\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi}\right) = 0 \tag{11}$$

及其复共轭，可以用总散度的形式写出变分 $\delta\mathcal{L}$：

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu\left[\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi}\delta\phi + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi^*}\delta\phi^*\right] \tag{12}$$

由于 $\delta\phi = i\alpha\phi$ 和 $\delta\phi^* = -i\alpha\phi^*$，得到

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu\left[i\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi}\phi - \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi^*}\phi^*\right)\alpha\right] \tag{13}$$

因此，由于 α 是任意的，$\delta\mathcal{L}$ 要恒为零，这当且仅当定义为

$$j^\mu = i\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi}\phi - \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi^*}\phi^*\right) \tag{14}$$

的 4-矢量 j^μ 是局域守恒的，即

$$\delta\mathcal{L} = 0 \qquad \text{当且仅当} \qquad \partial_\mu j^\mu = 0 \tag{15}$$

特别地，如果 $\mathcal{L}$ 形为

$$\mathcal{L} = \left(\partial_\mu\phi\right)^*\left(\partial^\mu\phi\right) - V\left(|\phi|^2\right) \tag{16}$$

这在式 (8) 的对称变换下显然是不变的，那么电流 j^μ 为

$$j^\mu = i\left(\partial^\mu\phi^*\phi - \phi^*\partial^\mu\phi\right) \equiv i\phi^*\overleftrightarrow{\partial_\mu}\phi \tag{17}$$

因此连续内部对称性的存在意味着局域守恒流的存在。

此外，守恒荷 $\mathcal{Q}$ 为

$$\mathcal{Q} = \int d^3x j^0\left(\mathbf{x}, x_0\right) = \int d^3x i\phi^*\overleftrightarrow{\partial_0}\phi \tag{18}$$

以正则动量 $\Pi(x)$ 表示，带荷标量场的全局守恒荷 $\mathcal{Q}$ 为

$$\mathcal{Q} = \int d^3x i\left(\phi^*\Pi - \phi\Pi^*\right) \tag{19}$$

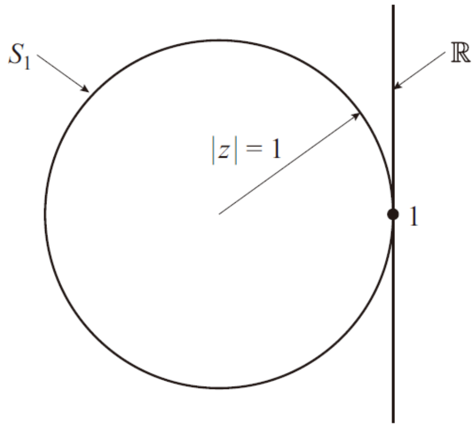

图 2: $U(1)$ 群与单位圆同构，而实数 $\mathbb{R}$ 与切线同构。

3 全局对称性和群表示

对上一节的结果进行概括。考虑一个标量场 ϕ^a，它在 Lie 群 G 的某个表示下发生不可还原的变换。在上一节所考虑的情况中，群 G 是单位长度的复数群，即 $U(1)$ 群。该群的元素 $g \in U(1)$ 具有形式 $g = e^{i\alpha}$.

这组复数构成一个群，即

1) 它在复数乘法下是封闭的，即，

$$g = e^{i\alpha} \in U(1) \text{ 且} g' = e^{i\beta} \in U(1) \Rightarrow g * g' = e^{i(\alpha+\beta)} \in U(1) \tag{20}$$

2) 有一个单位元（即 $g = 1$）。

3) 对于每个元素 $g = e^{i\alpha} \in U(1)$，都有一个唯一的逆元 $g^{-1} = e^{-i\alpha} \in U(1)$。

$U(1)$ 群的元素与单位圆 S_1 的点一一对应。因此，标记变换（或该群元素）的参数 α 是以 2π 为模来定义的，它应限制在区间 $(0, 2\pi]$ 内。然而，无限接近单位元 1 的变换本质上位于圆切于 1 的直线上，因此与实数群 $\mathbb{R}$ 同构。$U(1)$ 群是紧凑的，即其元素的自然参数长度为 2π，是有限的。相比之下，实数群 $\mathbb{R}$ 并不紧凑。之后我们基本总是用紧凑 Lie 群来处理内部对称性问题。

对于无穷小变换，$U(1)$ 群和 $\mathbb{R}$ 群本质上是相同的。然而，有些场构型却并非如此。一个典例是二维的涡旋构型。对于一个旋涡来说，半径为 $R \to \infty$ 的大圆上的场的相位会按 2π 卷绕。如果对称群是 $\mathbb{R}$ 而不是 $U(1)$，这种构型就不会存在。（注意，解析性要求 $x \to 0$ 时 $\phi \to 0$）。

另一个例子是 N 分量实标量场 $\phi^a(x)$，$a = 1, \cdots, N$。在这种情况下，对称性就是

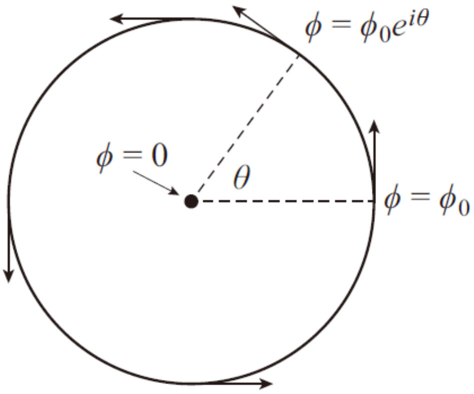

图 3: 涡旋。

N 维 Euclidean 空间中的旋转群：

$$\phi'^a(x) = R^{ab}\phi^b(x) \tag{21}$$

ϕ^a 场被认为像正交群 $O(N)$ 的 N 维（向量）表示那样进行了变换。

正交群 $R \in O(N)$ 的元素满足

1) 如果 $R_1 \in O(N)$ 且 $R_2 \in O(N)$，则 $R_1R_2 \in O(N)$，

2) $\exists I \in O(N)$ 使得 $\forall R \in O(N)$，$RI = IR = R$，

3) $\forall R \in O(N)$，$\exists R^{-1} \in O(N)$ 使得 $R^{-1} = R^t$，其中 R^t 是矩阵 R 的转置。

同样，如果 N 分量矢量 $\phi^a(x)$ 是复数场，它在 $N \times N$ 幺正变换 U 的群下变换：

$$\phi'^a(x) = U^{ab}\phi^b(x) \tag{22}$$

复 $N \times N$ 矩阵 U 是幺正群 $U(N)$ 的元素，并满足

1) 如果 $U_1 \in U(N)$ 且 $U_2 \in U(N)$，则 $U_1U_2 \in U(N)$，

2) $\exists I \in U(N)$ 使得 $\forall U \in U(N)$，$UI = IU = U$，

3) $\forall U \in U(N)$，$\exists U^{-1} \in U(N)$ 使得 $U^{-1} = U^\dagger$，其中 $U^\dagger = (U^t)^*$。

在上面讨论的特殊情况下，ϕ^a 的变换类似于 $U(N)$ 的基本（旋量）表示。如果进一步施加 $|\det U| = 1$ 的限制，那么群就变成了 $SU(N)$。例如，如果 $N = 2$，则群为 $SU(2)$，且

$$\boldsymbol{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \tag{23}$$

就 $SU(2)$ 的自旋-1/2 表示一样进行变换。

一般来说，对于任意连续的 Lie 群 G，场变换如下

$$\phi'_a(x) = \left(\exp\left[i\lambda^k\theta^k\right]\right)_{ab}\phi_b(x) \tag{24}$$

其中中 $\boldsymbol{\theta}$ 是任意常量（即与 x 无关）。矩阵 λ^k 是一组 $N \times N$ 线性独立的矩阵，张成了 Lie 群 G 的代数。对于给定的 Lie 群 G，此类矩阵的数目为 $D(G)$，它与所选表示的维数 N 无关。$D(G)$ 称为该群的秩。矩阵 λ_{ab}^k 是该表示中的群的生成元。

一般来说，从对称性的角度来看，场 ϕ 不一定是矢量，它也可以是张量，或者在群的任何表示下变换的东西。为简单起见，我们只考虑 $O(N)$ 的矢量表示，以及 $SU(N)$ 的基础表示（旋量）和伴随表示（矢量）。

对于任意紧凑的 Lie 群 G，生成元 $\{\lambda^j\}$，$j = 1, \cdots, D(G)$，是一组 hermitian ($\lambda_j^\dagger = \lambda_j$)、无迹 ($\mathrm{tr}\lambda_j = 0$) 矩阵，它们服从对易关系

$$\left[\lambda^j, \lambda^k\right] = i f^{jkl} \lambda^l \tag{25}$$

常数 f^{jkl} 被称为 Lie 群的结构常数，其在所有表示中都是相同的。此外，必须对生成元进行归一化。标准的归一化条件是

$$\mathrm{tr}\lambda^a \lambda^b = \frac{1}{2}\delta^{ab} \tag{26}$$

在上述复标量场 $\phi(x)$ 的情况下，对称群是形为 $e^{i\alpha}$ 的单位长度复数群。这个群称为 $U(1)$ 群。它的所有表示都是一维的，并且只有一个生成元。

一个常用的群是 $SU(2)$。这个在非相对论量子力学中广为人知的群有三个生成元，即 J_1、J_2 和 J_3，它们服从角动量代数

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k \tag{27}$$

其中

$$\mathrm{tr}(J_i J_j) = \frac{1}{2}\delta_{ij} \qquad \text{且} \qquad \mathrm{tr}J_i = 0 \tag{28}$$

$SU(2)$ 的表示用角动量量子数 J 标记。每个表示 J 都是 $2J+1$ 重简并（即表示维度为 $2J+1$）。

$SU(2)$ 的最低非平庸表示（即 $J \neq 0$）是旋量表示，其 $J = \frac{1}{2}$ 且是二维的。在这个表示中，场 $\phi_a(x)$ 是一个两分量复数场，而生成元 J_1、J_2 和 J_3 由一组 2×2Pauli 矩阵 $J_j = \frac{1}{2}\sigma_j$ 给出。

矢量（或自旋-1）表示是三维的，ϕ_a 是一个三分量矢量。在这种表示中，生成元非常简单：

$$(J_j)_{kl} = \epsilon_{jkl} \tag{29}$$

注意这个表示的维数 (3) 与 $SU(2)$ 群的秩数 (3) 相同。在这个被称为“伴随表示”的表示中，生成元的矩阵元就是结构常数。这是所有 Lie 群的一般特性。特别是，$SU(N)$ 群的秩为 N^2-1，有 N^2-1 个无穷小生成元，其伴随（向量）表示的维数为 N^2-1。例如 $SU(3)$ 的生成子数为 8。

另一个重要的例子是 N 维 Euclidean 空间的旋转群 $O(N)$。在这种情况下，该群有 $N(N-1)/2$ 个生成元，可以用矩阵 L^{ij} $(i,j=1,\cdots,N)$ 来标示。$O(N)$ 的基本（向量）表示是 N 维的，在这个表示中，生成元是

$$\left(L^{ij}\right)_{kl}=-i\left(\delta_{ik}\delta_{j\ell}-\delta_{i\ell}\delta_{jk}\right) \tag{30}$$

不难看出，L^{ij} 在 N 维空间中会生成无穷小转动。

一般来说，在给定的表示中，Lie 群的一个元素由一组 Euler 角标记，用 $\boldsymbol{\theta}$ 表示。如果欧拉角 $\boldsymbol{\theta}$ 是无穷小的，那么表示矩阵 $\exp(i\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\theta})$ 接近于单位矩阵，可以用 $\boldsymbol{\theta}$ 的幂来展开。在 $\boldsymbol{\theta}$ 的领头阶，ϕ^a 的变化为

$$\delta\phi^a(x)=i(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\theta})^{ab}\phi^b(x)+\cdots \tag{31}$$

如果 ϕ_a 为实数，则守恒流 j^μ 为

$$j_\mu^k(x)=\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi^a(x)}\lambda_{ab}^k\phi_b(x) \tag{32}$$

其中 $k=1,\cdots,D(G)$。这里生成元 λ^k 是实 hermitian 矩阵。相反，对于复数场 ϕ_a，守恒流为

$$j_\mu^k(x)=i\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi^a(x)}\lambda_{ab}^k\phi_b(x)-\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi^a(x)^*}\lambda_{ab}^k\phi_b(x)^*\right) \tag{33}$$

这里的生成元 λ^k 是 hermitian 矩阵（但不全是实的）。

因此得出结论，守恒流的数量等于该群的生成元数量。对于特定选择

$$\mathcal{L}=(\partial_\mu\phi_a)^*(\partial^\mu\phi_a)-V(\phi_a^*\phi_a) \tag{34}$$

守恒流为

$$j_\mu^k=i\lambda_{ab}^k\phi_a^*\overleftrightarrow{\partial_\mu}\phi_b \tag{35}$$

守恒荷为

$$Q^k=\int_V d^3xi\lambda_{ab}^k\phi_a^*\overleftrightarrow{\partial_0}\phi_b \tag{36}$$

其中 V 是空间的体积。

4 全局和局域对称性：规范不变性

全局对称性的存在假定，至少在原则上可以同时测量和改变空间所有点 $\mathbf{x}$ 上的场 $\phi^a(x)$ 的所有分量。相对论不变性告诉我们，尽管理论上可能具有这种全局对称性，但原则上无法进行这种实验。于是考虑局域进行对称操作时具有不变性的理论。也就是说我们要求 Lagrangian 在局域变换下是不变的

$$\phi_a(x)\to\phi_a'(x)=\left(\exp\left[i\lambda^k\theta^k(x)\right]\right)_{ab}\phi_b(x) \tag{37}$$

例如要求复标量场 $\phi(x)$ 的理论在局域相位变化时保持不变

$$\phi(x) \to \phi'(x) = e^{i\theta(x)}\phi(x) \tag{38}$$

标准局域 Lagrangian $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)^* (\partial^\mu \phi) - V\left(|\phi|^2\right) \tag{39}$$

在 $\theta =$ 常量 的全局变换下是不变的，但在任意光滑局域变换 $\theta(x)$ 下却不是不变的。主要问题在于，由于场的导数并不像场本身那样变换，动能项不再不变。事实上，在局部变换下，会发现

$$\partial_\mu \phi(x) \to \partial_\mu \phi'(x) = \partial_\mu \left[e^{i\theta(x)}\phi(x)\right] = e^{i\theta(x)}\left[\partial_\mu \phi + i\phi\partial_\mu \theta\right] \tag{40}$$

要使 $\mathcal{L}$ 局域不变，必须找到一个新的导数算符 D_μ，即协变导数，它在局域相位变换下的变换方式与场 $\phi(x)$ 相同：

$$D_\mu \phi \to D'_\mu \phi' = e^{i\theta(x)} D_\mu \phi \tag{41}$$

从几何角度看，可以将情况描绘如下。要局域定义 $\phi(x)$ 的相位，必须定义一个局域系（或基准场），相对于这个系来测量场的相位。那么，局域规范不变性就是指系统的物理特性必须与系的特定选择无关。从这个角度来看，局域规范不变性是相对论原理在内部对称情况下的延伸。

现在，如果想进行时空中不同点之间的相位变换，就必须说明从时空中的一个点 x 到另一个点 y 时，相位是如何变化的。换句话说，必须定义一种联络，告诉我们在沿着某条路径行进时，如何将 ϕ 的相位从 x 平行传输到 y。考虑 x 和 y 任意接近的情况（即 $y_\mu = x_\mu + dx_\mu$，其中 dx_μ 是一个无穷小的 4-矢量）。ϕ 的变化是

$$\phi(x + dx) - \phi(x) = \delta\phi(x) \tag{42}$$

如果 ϕ 沿着从 x 到 $x + dx$ 的某条路径的输运与相位变换相对应，那么 $\delta\phi$ 必须与 ϕ 成正比。因此可以定义

$$\delta\phi(x) = iA_\mu(x)\, dx^\mu \phi(x) \tag{43}$$

其中 $A_\mu(x)$ 是一个适当选择的矢量场。显然这意味着协变导数 D_μ 必须定义为

$$D_\mu \phi \equiv \partial_\mu \phi(x) - ieA_\mu(x)\phi(x) \equiv (\partial_\mu - ieA_\mu)\phi \tag{44}$$

其中 e 是一个参数，我们将用耦合常数对其进行物理解释。

$A_\mu(x)$ 应该如何变换？必须选择其变换规律使 $D_\mu \phi$ 像 $\phi(x)$ 本身一样变换。因此，如果 $\phi \to e^{i\theta}\phi$，则有

$$D'\phi' = \left(\partial_\mu - ieA'_\mu\right)\left(e^{i\theta}\phi\right) \equiv e^{i\theta} D_\mu \phi \tag{45}$$

在以下情况下可以满足这一要求

$$i\partial_\mu\theta - ieA'_\mu = -ieA_\mu \tag{46}$$

因此，A_μ 的变换应该是

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\theta \tag{47}$$

但这就是规范变换！事实上，如果定义规范变换 $\Phi(x)$

$$\Phi(x) \equiv \frac{1}{e}\theta(x) \tag{48}$$

可以看到，矢量场 A_μ 的变换就像 Maxwell 电磁学的矢势。

我们的结论是，通过用协变导数替换导数算符，可以将全局对称性提升为局域对称性（即规范对称性）。因此，我们可以通过引入一个矢量场 A_μ，即规范场，使一个系统在局域规范变换下保持不变，而这个矢量场起到了联络的作用。从物理角度来看，这一结果意味着，要想在远处比较 $\phi(x)$ 场的相位是不可能的，这就要求必须存在一个物理规范场 $A_\mu(x)$。这种通过协变导数将物质场和规范场联系起来的过程称为最小耦合。

有一组 $\phi(x)$ 的构型仅因规范场的存在而改变。这就是测地线构型 $\phi_c(x)$。它们满足方程

$$D_\mu\phi_c = (\partial_\mu - ieA_\mu)\phi_c \equiv 0 \tag{49}$$

这相当于线性方程（利用式 (43)）

$$\partial_\mu\phi_c = ieA_\mu\phi_c \tag{50}$$

例如，考虑位于路径 $\Gamma(x,y)$ 两端的时空点 x 和 y。对于给定的路径 $\Gamma(x,y)$，式 (50) 的解是线积分的路径排序的指数：

$$\phi_c(x) = e^{-ie\int_{\Gamma(x,y)} dz_\mu A^\mu(z)}\phi_c(y) \tag{51}$$

事实上，在规范变换下，线积分的变换如下

$$\begin{aligned} e\int_{\Gamma(x,y)} dz_\mu A^\mu &\mapsto e\int_{\Gamma(x,y)} dz_\mu A^\mu + e\int_{\Gamma(x,y)} dz_\mu \frac{1}{e}\partial^\mu\theta \\ &= e\int_{\Gamma(x,y)} dz_\mu A^\mu(z) + \theta(y) - \theta(x) \end{aligned} \tag{52}$$

因此得到

$$\begin{aligned} \phi_c(y)\, e^{-ie\int_\Gamma dz_\mu A^\mu} &\mapsto \phi_c(y)\, e^{-ie\int_\Gamma dz_\mu A^\mu} e^{-i\theta(y)} e^{i\theta(x)} \\ &\equiv e^{i\theta(x)}\phi_c(x) \end{aligned} \tag{53}$$

然而，我们现在想知道 ϕ_c 的相位变化如何取决于路径的选择。令 $\phi_c^{\Gamma_1}(y)$ 和 $\phi_c^{\Gamma_2}(y)$ 分别为具有相同终点 x 和 y 的两条不同路径 1 和 2 的测地线方程的解。显然，相位变化 $\Delta\gamma$ 为

$$\Delta\gamma = -e\int_{\Gamma_1} dz_\mu A^\mu + e\int_{\Gamma_2} dz_\mu A^\mu \equiv -e\oint_{\Gamma^+} dz_\mu A^\mu \tag{54}$$

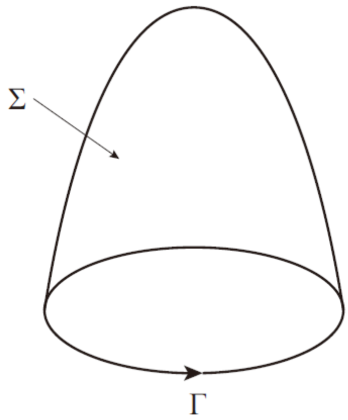

图 4: 闭合路径 Γ 是开放曲面 Σ 的边界。

这里 Γ^{+} 是封闭的定向路径

$$\Gamma^{+}=\Gamma_{1}^{+}\cup\Gamma_{2}^{-} \tag{55}$$

且

$$\int_{\Gamma_{2}^{-}} dz_{\mu}A_{\mu}=-\int_{\Gamma_{2}^{+}} dz_{\mu}A_{\mu} \tag{56}$$

利用 Stokes 定理，可以看到，如果 Σ^{+} 是一个定向曲面，其边界是定向闭合路径 Γ^{+}，$\partial\Sigma^{+}\equiv\Gamma^{+}$，那么 $\Delta\gamma$ 由通过曲面 Σ^{+} 的矢量场 A_{μ} 的旋度的通量 $\Phi\left(\Sigma\right)$ 给出：

$$\Delta\gamma=-\frac{e}{2}\int_{\Sigma^{+}} dS_{\mu\nu}F^{\mu\nu}=-e\Phi\left(\Sigma\right) \tag{57}$$

其中 $F^{\mu\nu}$ 是场张量

$$F^{\mu\nu}=\partial^{\mu}A^{\nu}-\partial^{\nu}A^{\mu} \tag{58}$$

中 $dS^{\mu\nu}$ 是定向面积元，$\Phi\left(\Sigma\right)$ 是通过表面 Σ 的通量。$F^{\mu\nu}$ 和 $dS^{\mu\nu}$ 的时空指标都是反对称的。特别地，$F^{\mu\nu}$ 和 $dS^{\mu\nu}$ 也可以写成两个协变导数的对易子：

$$F^{\mu\nu}=\frac{i}{e}\left[D^{\mu},D^{\nu}\right] \tag{59}$$

因此，$F^{\mu\nu}$ 测量的是沿两个独立方向位移的（无限小）不相容性。换句话说，$F^{\mu\nu}$ 是曲率张量。这些结果非常清楚地表明，如果 $F^{\mu\nu}$ 在时空的某个区域不为零，那么 ϕ 的相位就无法唯一确定：ϕ_{c} 的相位取决于测量它的路径 Γ。

5 Aharonov-Bohm 效应

ϕ_{c} 的相位的路径依赖性与 Aharonov-Bohm 效应密切相关。这种效应非常微妙。它最早是在基础量子力学中被发现的，在（量子）场论中也起着基础性作用。

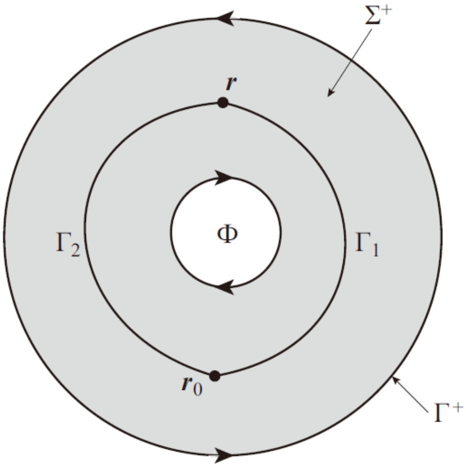

图 5: Aharonov-Bohm 效应的几何设置：磁通量 $\Phi \neq 0$ 穿过穿孔平面 Σ^+ 上的小孔。这里 Γ^+ 代表穿孔平面 Σ^+ 的定向外边缘和内边缘之和；Γ_1 和 Γ_2 是从 $\mathbf{r}_0$ 到 $\mathbf{r}$ 的两条不等价路径。

考虑一个在平面上运动的电荷量为 e、质量为 m 的量子力学粒子。粒子与外部电磁场 A_μ 耦合（此处 $\mu = 0, 1, 2$，因为不存在平面外的运动）。考虑一个无穷细的螺线管在某个点 $\mathbf{r} = 0$ 附近穿透了平面。这个问题的 Schrödinger 方程为

$$H\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \tag{60}$$

其中

$$H = \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla + \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 \tag{61}$$

为 Hamiltonian。除 $\mathbf{r} = 0$ 处外，磁场 $\mathbf{B} = B\hat{z}$ 在任何地方都为零，

$$B = \Phi_0 \delta(r) \tag{62}$$

利用 Stokes 定理，可以看出，通过边界 Γ^+ 的任意区域 Σ^+ 的 $\mathbf{B}$ 的通量为

$$\Phi = \int_{\Sigma^+} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B} = \oint_{\Gamma^+} d\ell \cdot \mathbf{A} \tag{63}$$

因此，对于包围点 $\mathbf{r} = 0$ 所有面 Σ^+ 有 $\Phi = \Phi_0$，否则等于零。因此，虽然 $\mathbf{r} \neq 0$ 时磁场为零，但矢势并没有（也不可能）为零。

波函数 $\Psi(\mathbf{r})$ 的计算方法非常简单。定义

$$\Psi(\mathbf{r}) = e^{i\theta(\mathbf{r})}\Psi_0(\mathbf{r}) \tag{64}$$

其中 $\Psi_0(\mathbf{r})$ 满足无场情况下的 Schrödinger 方程，即

$$H_0\Psi_0 = i\hbar \frac{\partial \Psi_0}{\partial t} \tag{65}$$

其中

$$H_0=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 \tag{66}$$

由于波函数必须是可微的，且 Ψ_0 是单值的，因此还必须满足边界条件：

$$\lim_{\mathbf{r}\to 0}\Psi_0\left(\mathbf{r},t\right)=0 \tag{67}$$

波函数 $\Psi=\Psi_0 e^{i\theta}$ 看起来像一种规范变换。但这里有一个微妙之处。事实上 θ 可以如下确定。通过直接代换得到

$$\left(\frac{\hbar}{i}\nabla+\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\left(e^{i\theta}\Psi_0\right)=e^{i\theta}\left(\hbar\nabla\theta+\frac{e}{c}\mathbf{A}+\frac{\hbar}{i}\nabla\right)\Psi_0 \tag{68}$$

因此只需要求 $\mathbf{A}$ 和 θ 必须遵守以下关系式

$$\hbar\nabla\theta+\frac{e}{c}\mathbf{A}\equiv 0 \tag{69}$$

或等价地

$$\nabla\theta\left(\mathbf{r}\right)=-\frac{e}{\hbar c}\mathbf{A}\left(\mathbf{r}\right) \tag{70}$$

然而，如果这种关系成立，θ 就不可能是 $\mathbf{r}$ 的光滑函数。事实上，$\nabla\theta$ 在任意闭合路径 Γ^+ 上的线积分为

$$\int_{\Gamma^+} d\boldsymbol{\ell}\cdot\nabla\theta=\Delta\theta \tag{71}$$

其中，$\Delta\theta$ 是绕路径 Γ 逆时针旋转一圈后 θ 的总变化量。由此可知 $\Delta\theta$ 为

$$\Delta\theta=-\frac{e}{\hbar c}\oint_{\Gamma^+} d\boldsymbol{\ell}\cdot\mathbf{A} \tag{72}$$

因此，一般来说，$\theta\left(\mathbf{r}\right)$ 必须是 $\mathbf{r}$ 的多值函数，其分支割线从 $\mathbf{r}=0$ 一直延伸到无穷远处的某个任意点。分支割线的实际位置和形状无关紧要，但 θ 在穿过割线的不连续性 $\Delta\theta$ 并非无关紧要。

因此，在没有螺线管的情况下，Ψ_0 是 Schrödinger 方程的光滑单值解，满足式 (67) 的边界条件。这种波函数（几乎）是平面波。

由于函数 $\theta\left(\mathbf{r}\right)$ 是多值的，因此与路径有关，波函数也是多值的和与路径有关的。具体来说，假设 $\mathbf{r}_0$ 是平面上的某个任意点，$\Gamma\left(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}\right)$ 是一条始于 $\mathbf{r}_0$ 止于 $\mathbf{r}$ 的路径。对于该选择的路径，相位 $\theta\left(\mathbf{r}\right)$ 由下式给出

$$\theta\left(\mathbf{r}\right)=\theta\left(\mathbf{r}_0\right)-\frac{e}{\hbar c}\int_{\Gamma\left(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}\right)} d\mathbf{x}\cdot\mathbf{A}\left(\mathbf{x}\right) \tag{73}$$

由两条不同路径 $\Gamma_1\left(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}\right)$ 和 $\Gamma_2\left(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}\right)$ 定义的两个波函数的重叠度为（$\mathbf{r}_0$ 固定不变）

$$\begin{aligned}\langle\Gamma_1|\Gamma_2\rangle&=\int d^2\mathbf{r}\Psi^*_{\Gamma_1}\left(\mathbf{r}\right)\Psi_{\Gamma_2}\left(\mathbf{r}\right)\\&\equiv\int d^2r\left|\Psi_0\left(\mathbf{r}\right)\right|^2\exp\left\{+\frac{ie}{\hbar c}\left(\int_{\Gamma_1\left(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}\right)} d\ell\cdot\mathbf{A}-\int_{\Gamma_2\left(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}\right)} d\ell\cdot\mathbf{A}\right)\right\}\end{aligned} \tag{74}$$

如果选择 Γ_1 和 Γ_2 时，原点（螺线管穿过平面的位置）总是在 Γ_1 的左边但也总是在 Γ_2 的右边，则两个线积分的差值就是 $\mathbf{A}$ 的环量

$$\int_{\Gamma_1(\mathbf{r}_0,\mathbf{r})} d\boldsymbol{\ell}\cdot\mathbf{A} - \int_{\Gamma_2(\mathbf{r}_0,\mathbf{r})} d\boldsymbol{\ell}\cdot\mathbf{A} \equiv \oint_{\Gamma^+_{(\mathbf{r})}} d\boldsymbol{\ell}\cdot\mathbf{A} \tag{75}$$

该环路为闭合正向环路 $\Gamma^+ = \Gamma_1(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}) \cup \Gamma_2(\mathbf{r}_0,\mathbf{r})$。由于这个环量是恒定的，并且等于通量 Φ，可发现重叠度 $\langle\Gamma_1|\Gamma_2\rangle$ 为

$$\langle\Gamma_1|\Gamma_2\rangle = \exp\left\{\frac{ie}{\hbar c}\Phi\right\} \tag{76}$$

其中我们取 Ψ_0 为归一化值。式 (76) 被称为 Aharonov-Bohm 效应。

重叠度是一个纯粹的相位因子，一般来说不等于 1。注意，尽管波函数总是定义到一个恒定的任意相位因子，但相位变化是物理效应。此外，对于某些特殊的 Φ 的选取，波函数会变成单值。这些值对应于

$$\frac{e}{\hbar c}\Phi = 2\pi n \tag{77}$$

其中 n 为任意整数。这一要求相当于磁通量 Φ 的量子化条件：

$$\Phi = n\left(\frac{hc}{e}\right) \equiv n\Phi_0 \tag{78}$$

其中 Φ_0 是磁通量子，$\Phi_0 = \frac{hc}{e}$。

1931 年，Dirac 考虑了磁场的单极子构型对带电粒子的量子力学波函数的影响。在 Dirac 的构造中，磁单极子被表示为三维空间中的细长螺线管。螺线管末端附近的磁场与磁荷 m 的磁场相同，等于穿过螺线管的磁通量。Dirac 认为，要使螺线管（“Dirac 弦”）不可观测，波函数必须是单值的。这一要求导致了最小磁荷的 Dirac 量子化条件：

$$me = 2\pi\hbar c \tag{79}$$

这与式 (78) 中的磁通量子化条件相同。

6 非 abelian 规范不变性

现在考虑具有非 abelian 全局对称性的系统。这意味着场 ϕ 的变换类似于一个 Lie 群 G 的某个表示，

$$\phi'_a(x) = U_{ab}\phi_b(x) \tag{80}$$

其中 U 是表示群元作用的矩阵。局域 Lagrangian 密度，

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\phi_a^*\partial^\mu\phi^a - V\left(|\phi|^2\right) \tag{81}$$

在全局变换下是不变的。

假设现在想把这种全局对称性提升为局域对称性。然而，在这种一般情况下，尽管势能项 $V\left(|\phi|^2\right)$ 在局域变换 $U\left(x\right)$ 下是不变的，但式 (81) 中 Lagrangian 的第一项却不是。事实上，ϕ 的梯度在 Lie 群 G 的作用下并不能正确地变换（即协变）：

$$
\begin{aligned}
\partial_\mu \phi'\left(x\right) &= \partial_\mu\left[U\left(x\right)\phi\left(x\right)\right] \\
&= \left(\partial_\mu U\left(x\right)\right)\phi\left(x\right) + U\left(x\right)\partial_\mu\phi\left(x\right) \\
&= U\left(x\right)\left[\partial_\mu\phi\left(x\right) + U^{-1}\left(x\right)\partial_\mu U\left(x\right)\phi\left(x\right)\right]
\end{aligned}
\tag{82}
$$

因此，$\partial_\mu\phi$ 与 ϕ 场的变换方式不同。

可以沿用在 abelian 情况下使用的方法，定义一个协变导数算符 D_μ，它应该具有这样的性质：$D_\mu\phi$ 与 ϕ 场遵循相同的变换规律：

$$
\left(D_\mu\phi\left(x\right)\right)' = U\left(x\right)\left(D_\mu\phi\left(x\right)\right) \tag{83}
$$

显然，D_μ 现在既是微分算符，又是作用于 ϕ 场的矩阵。可以类比电动力学的情况，猜测协变导数 D_μ 的形式应该是

$$
D_\mu = I\partial_\mu - igA_\mu\left(x\right) \tag{84}
$$

其中，g 是耦合常数，I 是 $N\times N$ 单位矩阵，A_μ 是矩阵值矢量场。如果 ϕ 有 N 个分量，则矢量场 $A_\mu\left(x\right)$ 是一个 $N\times N$ 的 hermitian 矩阵，可以在群生成元 λ^k_{ab} （其中 $k=1,\cdots,D\left(G\right)$，$a,b=1,\cdots,N$）的基上展开，其张成了 Lie 群 G 的代数：

$$
\left(A_\mu\left(x\right)\right)_{ab} = A^k_\mu\left(x\right)\lambda^k_{ab} \tag{85}
$$

因此，矢量场 $A_\mu\left(x\right)$ 由 $D\left(G\right)$ 个分量的 4-矢量 $A^k_\mu\left(x\right)$ 参数化。选择 $A_\mu\left(x\right)$ 的变换性质，使得 $D_\mu\phi$ 在规范变换下进行协变的变换：

$$
\begin{aligned}
D'_\mu\phi\left(x\right) \equiv D'_\mu\left(U\left(x\right)\phi\left(x\right)\right) &= \left(\partial_\mu - igA'_\mu\left(x\right)\right)\left(U\phi\left(x\right)\right) \\
&= U\left(x\right)\left[\partial_\mu\phi\left(x\right) + U^{-1}\left(x\right)\partial_\mu U\left(x\right)\phi\left(x\right) - igU^{-1}\left(x\right)A'_\mu\left(x\right)U\left(x\right)\phi\left(x\right)\right] \\
&\equiv U\left(x\right)D_\mu\phi\left(x\right)
\end{aligned}
\tag{86}
$$

如果要求

$$
U^{-1}\left(x\right)igA'_\mu\left(x\right)U\left(x\right) = igA_\mu\left(x\right) + U^{-1}\left(x\right)\partial_\mu U\left(x\right) \tag{87}
$$

就能满足条件，或等价地，A_μ 服从变换定律

$$
A'_\mu\left(x\right) = U\left(x\right)A_\mu\left(x\right)U^{-1}\left(x\right) - \frac{i}{g}\left(\partial_\mu U\left(x\right)\right)U^{-1}\left(x\right) \tag{88}
$$

由于矩阵 $U(x)$ 是幺正可逆矩阵，有

$$U^{-1}(x)\,U(x)=I \tag{89}$$

可以把变换后的矢量场 $A'_\mu(x)$ 写成如下形式

$$A'_\mu(x)=U(x)\,A_\mu(x)\,U^{-1}(x)+\frac{i}{g}U(x)\left(\partial_\mu U^{-1}(x)\right) \tag{90}$$

这是非 abelian Lie 群 G 的规范变换的一般形式。

在 abelian 对称群的情况下，如 $U(1)$ 群，矩阵简化为一个简单的相位因子，$U(x)=e^{i\theta(x)}$，而场 $A_\mu(x)$ 是一个实矢量场。不难发现在这种情况下，A_μ 的变换如下：

$$\begin{aligned}A'_\mu(x)&=e^{i\theta(x)}A_\mu(x)\,e^{-i\theta(x)}+\frac{i}{g}e^{i\theta(x)}\partial_\mu\left(e^{-i\theta(x)}\right)\\&\equiv A_\mu(x)+\frac{1}{g}\partial_\mu\theta(x)\end{aligned} \tag{91}$$

从而回到了 abelian 规范变换的正确形式。

现在回到非 abelian 情况，可以看到，在无穷小变换 $U(x)$ 下，

$$(U(x))_{ab}=\left[\exp\left(i\lambda^k\theta^k(x)\right)\right]_{ab}\cong\delta_{ab}+i\lambda^k_{ab}\theta^k(x)+\cdots \tag{92}$$

标量场 $\phi(x)$ 变换为

$$\delta\phi_a(x)\cong i\lambda^k_{ab}\phi_b(x)\,\theta^k(x)+\cdots \tag{93}$$

而矢量场 A^k_μ 现在变换为

$$\delta A^k_\mu(x)\cong if^{ksj}A^j_\mu(x)\,\theta^s(x)+\frac{1}{g}\partial_\mu\theta^k(x)+\cdots \tag{94}$$

因此，$A^k_\mu(x)$ 在 Lie 群 G 的伴随表示中按矢量变换，因为在该表示中，生成元的矩阵元是群结构常数 f^{ksj}。注意，无论 $\phi(x)$ 出现在哪个表示中，A^k_μ 总是在群 G 的伴随表示中。

从这一讨论中可以清楚地看出，场 $A_\mu(x)$ 可以解释为电磁学矢势的推广。此外，A_μ 还提供了一种自然联络，告诉我们“内部坐标系”，即 $\phi(x)$ 场的定义所参照的坐标系，如何从时空的一点 x_μ 变为邻近的一点 $x_\mu+dx_\mu$。尤其是构型 $\phi^a(x)$，它们是测地线方程的解

$$D^{ab}_\mu\phi_b(x)=0 \tag{95}$$

对应于 ϕ 从某点 x 到某点 y 的平行输运。可以写成等价形式

$$\partial_\mu\phi_a(x)=igA^k_\mu(x)\,\lambda^k_{ab}\phi_b(x) \tag{96}$$

这个线性偏微分方程的解法如下。令 x_μ 和 y_μ 是时空中的两个任意点，$\Gamma(x,y)$ 是一条固定路径，其端点分别位于 x 和 y。这条路径的参数是实区间 $[0,1]$ 到 Minkowski 空间 $\mathcal{M}$（或任何其他空间）的映射 z_μ，$z_\mu:[0,1]\mapsto\mathcal{M}$，其形式为

$$z_\mu=z_\mu(t)\qquad t\in[0,1] \tag{97}$$

边界条件为

$$z_\mu(0) = x_\mu \qquad \text{和} \qquad z_\mu(1) = y_\mu \tag{98}$$

沿路径 Γ 对测地线方程即式 (95) 积分，可得

$$\int_{\Gamma(x,y)} dz_\mu \frac{\partial \phi_a(z)}{\partial z_\mu} = ig \int_{\Gamma(x,y)} dz_\mu A^\mu_{ab}(z)\,\phi_b(z) \tag{99}$$

因此发现 $\phi(x)$ 一定是如下积分方程的解

$$\phi(y) = \phi(x) + ig \int_{\Gamma(x,y)} dz_\mu A^\mu(z)\,\phi(z) \tag{100}$$

为简化符号，此处省略了所有指标。以路径 $\Gamma(x,y)$ 的参数化 $z_\mu(t)$，可以写出

$$\phi(y) = \phi(x) + ig \int_0^1 dt \frac{dz_\mu}{dt} A^\mu(z(t))\,\phi(z(t)) \tag{101}$$

下面将通过迭代过程来求解这个方程，类似于量子理论中的演化算符。通过反复将方程的左边代入右边，可以得到以下序列

$$\begin{aligned}\phi(y) =& \phi(x) + ig \int_0^1 dt \frac{dz_\mu(t)}{dt} A^\mu(z(t))\,\phi(x) \\ &+ (ig)^2 \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \frac{dz_{\mu_1}(t_1)}{dt_1}\frac{dz_{\mu_2}(t_2)}{dt_2} A^{\mu_1}(z(t_1))\,A^{\mu_2}(z(t_2))\,\phi(x) \\ &+ \cdots + (ig)^n \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \prod_{j=1}^n \left(\frac{dz_{\mu_j}(t_j)}{dt_j} A^{\mu_j}(z(t_j))\right)\phi(x) \\ &+ \cdots\end{aligned} \tag{102}$$

这里需记住，A^μ 是矩阵取值的场，从左到右排列。

式 (102) 中的嵌套积分可以写成以下形式

$$\begin{aligned}I_n &= (ig)^n \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n F(t_1)\cdots F(t_n) \\ &\equiv \frac{(ig)^n}{n!}\hat{P}\left[\left(\int_0^1 dt F(t)\right)^n\right]\end{aligned} \tag{103}$$

其中，F 是矩阵，而算符 $\hat{P}$ 指的是其右侧对象的路径排序的积。如果正式定义一个算符的指数等于它的幂级数展开，

$$e^A \equiv \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}A^n \tag{104}$$

其中 A 是某个任意矩阵，则可以看到测地线方程的形式解为

$$\phi(y) = \hat{P}\left[\exp\left(+ig\int_0^1 dt \frac{dz_\mu}{dt} A^\mu(z(t))\right)\right]\phi(x) \tag{105}$$

或等价地，

$$\phi(y)=\hat{P}\left[\exp\left(ig\int_{\Gamma(x,y)}dz_{\mu}A^{\mu}(z)\right)\right]\phi(x) \tag{106}$$

因此，$\phi(y)$ 是由作用于 $\phi(x)$ 的算符，即矢势 A^{μ} 的线积分的路径排序的指数给出的。

通过对指数进行幂级数展开，很容易发现，在任意的局域规范变换 $U(z)$ 下，路径排序的指数变换如下：

$$\hat{P}\left[\exp\left(ig\int_{\Gamma(x,y)}dz^{\mu}A'_{\mu}(z(t))\right)\right]\equiv U(y)\,\hat{P}\left[\exp\left(ig\int_{\Gamma(x,y)}dz^{\mu}A_{\mu}(z)\right)\right]U^{-1}(x) \tag{107}$$

具体来说，可以考虑闭合路径 $\Gamma(x,x)$ 的情况，其中 x 是 Γ 上的任意点。路径排序指数 $\hat{W}_{\Gamma(x,x)}$

$$\hat{W}_{\Gamma(x,x)}=\hat{P}\left[\exp\left(ig\int_{\Gamma(x,x)}dz^{\mu}A_{\mu}(z)\right)\right] \tag{108}$$

不是规范不变的，因为在规范变换下，它变换为

$$\begin{aligned}\hat{W}'_{\Gamma(x,x)}&=\hat{P}\left[\exp\left(ig\int_{\Gamma(x,x)}dz^{\mu}A'_{\mu}(z)\right)\right]\\&=U(x)\,\hat{P}\left[\exp\left(ig\int_{\Gamma(x,x)}dz^{\mu}A_{\mu}(t)\right)\right]U^{-1}(x)\end{aligned} \tag{109}$$

因此，$\hat{W}_{\Gamma(x,x)}$ 的变换就像群元：

$$\hat{W}_{\Gamma(x,x)}=U(x)\,\hat{W}_{\Gamma(x,x)}U^{-1}(x) \tag{110}$$

而 $\hat{W}_{\Gamma(x,x)}$ 的迹，其表示为

$$W_{\Gamma}=\mathrm{tr}\hat{W}_{\Gamma(x,x)}\equiv\mathrm{tr}\hat{P}\left[\exp\left(ig\int_{\Gamma(x,x)}dz^{\mu}A_{\mu}(z)\right)\right] \tag{111}$$

不仅是规范不变的，而且与 x 点的选择无关。然而，它是路径 Γ 的泛函。量 W_{Γ} 称为 Wilson 回路，在规范理论中起着至关重要的作用。在量子理论中，这个对象成为 Wilson 回路算符。

现在考虑小闭合路径 Γ 的情况。如果路径很小，那么它所围成的最小面积 $a(\Gamma)$ 和长度 $\ell(\Gamma)$ 都是无限小的。在这种情况下，可以对指数进行幂级数展开，只保留领头阶。得到

$$\hat{W}_{\Gamma}\approx I+ig\hat{P}\oint_{\Gamma}dz^{\mu}A_{\mu}(z)+\frac{(ig)^2}{2!}\hat{P}\left(\oint_{\Gamma}dz^{\mu}A_{\mu}(z)\right)^2+\cdots \tag{112}$$

Stokes 定理指出，第一个积分（矢量场 A_{μ} 在闭合路径 Γ 上的环量）由下式给出

$$\oint_{\Gamma}dz^{\mu}A_{\mu}(z)=\iint_{\Sigma}dx^{\mu}\wedge dx^{\nu}\frac{1}{2}\left(\partial_{\mu}A_{\nu}-\partial_{\nu}A_{\mu}\right) \tag{113}$$

其中 $\partial\Sigma=\Gamma$ 是以 Γ 为边界的无穷小面积元，$dx^\mu\wedge dx^\nu$ 是定向无穷小面积元。此外，式 (112) 中的二次项可以表示如下：

$$\frac{1}{2!}\hat{P}\left(\oint_\Gamma dz^\mu A_\mu(z)\right)^2\equiv\frac{1}{2}\iint_\Sigma dx^\mu\wedge dx^\nu\left(-\left[A_\mu,A_\nu\right]\right)+\cdots \tag{114}$$

因此，对于一个无限小回路，可以得到

$$\hat{W}_{\Gamma(x,x')}\approx I+\frac{ig}{2}\iint_\Sigma dx^\mu\wedge dx^\nu F_{\mu\nu}+O\left(a(\Sigma)^2\right) \tag{115}$$

其中，$F_{\mu\nu}$ 是场张量，定义为

$$F_{\mu\nu}\equiv\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu-ig\left[A_\mu,A_\nu\right]=i\left[D_\mu,D_\nu\right] \tag{116}$$

记住，由于场 A_μ 是矩阵，因此场张量 $F_{\mu\nu}$ 也是矩阵。

还要注意的是，现在 $F_{\mu\nu}$ 并非规范不变。事实上，在局域规范变换 $U(x)$ 的作用下，$F_{\mu\nu}$ 会发生相似变换：

$$F'_{\mu\nu}(x)=U(x)\,F_{\mu\nu}(x)\,U^{-1}(x) \tag{117}$$

这一特性源于 A_μ 的变换特性。不过，尽管 $F_{\mu\nu}$ 本身不是规范不变的，但其他量，如 $\mathrm{tr}\left(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right)$，却是规范不变的。

最后来看 $F_{\mu\nu}$ 的分量形式。将 $F_{\mu\nu}$ 在群生成元 λ^k 的基上展开（因此是在规范群的代数中展开），

$$F_{\mu\nu}=F^k_{\mu\nu}\lambda^k \tag{118}$$

发现分量 $F^k_{\mu\nu}$ 是

$$F^k_{\mu\nu}=\partial_\mu A^k_\nu-\partial_\nu A^k_\mu+gf^{k\ell m}A^\ell_\mu A^m_\nu \tag{119}$$

非 abelian 规范群的自然局域规范不变理论是 Yang-Mills Lagrangian

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{4}\mathrm{tr}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{120}$$

这对应一般紧凑 Lie 群 G，称之为规范群。注意，与 Maxwell Lagrangian 的相似性只是表面现象，因为在这个理论中并不是矢势的二次方。如果某些对称性（如时间反演）被违反，在其他维度中也可能出现其他 Lagrangian。

7 规范不变性和最小耦合

现在可以给出物质场与规范场耦合的一般规定。由于这里的问题是局域规范不变性，所以这个规定对相对论和非相对论理论都有效。

到目前为止考虑了两种情况：(1) 描述物质动力学的场，(2) 描述电磁学和色动力学的规范场。在描述 Maxwell 电动力学时，如果要求 Lagrangian 遵守局域规范不变性，那么只有守恒流才能与规范场耦合。然而，全局对称性的存在是局域守恒流存在的充分条件。这不仅是一个必要条件，因为局域对称性也要求存在守恒流。

现在要考虑包含物质场和规范场的更一般的 Lagrangian。之前我们看到，如果一个具有 Lagrangian $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ 的系统具有全局对称性 $\phi \to U\phi$，那么通过用协变导数代替所有导数，就可以把全局对称性提升为局域（或规范）对称性。我们将继续这个一般理念，写下包含物质场和规范场的系统的规范不变的 Lagrangian。接下来给出几个明确的例子。

7.1 量子电动力学

量子电动力学 (QED) 是关于电子和光子的理论。电子由 Dirac 旋量场 $\psi_\alpha(x)$ 描述。在讨论量子理论和自旋统计定理时，就会明白这样选择的原因。光子由 $U(1)$ 规范 A_μ 描述。自由电子的 Lagrangian 就是自由 Dirac Lagrangian，即 $\mathcal{L}_{\text{Dirac}}$：

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}}\left(\psi, \bar{\psi}\right) = \bar{\psi}\left(i\partial\!\!\!/ - m\right)\psi \tag{121}$$

规范场的 Lagrangian 是自由 Maxwell Lagrangian，即 $\mathcal{L}_{\text{gauge}}(A)$：

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}}(A) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \equiv -\frac{1}{4}F^2 \tag{122}$$

我们将采用的规定称为最小耦合，包括要求总 Lagrangian 在规范变换下保持不变。

自由 Dirac Lagrangian 在全局相位变换下是不变的（即所有 Dirac 分量的相位因子相同），

$$\psi_\alpha(x) \to \psi'_\alpha(x) = e^{i\theta}\psi_\alpha(x) \tag{123}$$

如果 θ 是一个恒定的任意相位，但它在局域相位变换下并不是不变的：

$$\psi_\alpha(x) \to \psi'_\alpha(x) = e^{i\theta(x)}\psi_\alpha(x) \tag{124}$$

正如之前所看到的，Lagrangian 的物质部分可以在局域变换下保持不变，

$$\begin{aligned} \psi_\alpha(x) &\to \psi'_\alpha(x) = e^{i\theta(x)}\psi_\alpha(x) \\ A_\mu(x) &\to A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x) \end{aligned} \tag{125}$$

如果导数 $\partial_\mu\psi$ 被协变导数 D_μ 取代：

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu(x) \tag{126}$$

现在总 Lagrangian 由两项之和给出，

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}_{\text{matter}}\left(\psi,\bar{\psi},A\right)+\mathcal{L}_{\text{gauge}}\left(A\right) \tag{127}$$

其中，$\mathcal{L}_{\text{matter}}\left(\psi,\bar{\psi},A\right)$ 是 Dirac Lagrangian 的规范不变拓展：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{matter}}\left(\psi,\bar{\psi},A\right)&=\bar{\psi}\left(i\not{D}-m\right)\psi\\&=\bar{\psi}\left(i\not{\partial}-m\right)\psi+e\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi A^{\mu}\end{aligned} \tag{128}$$

$\mathcal{L}_{\text{gauge}}\left(A\right)$ 是通常的 Maxwell 项，$\not{D}$ 是 $\gamma^{\mu}D_{\mu}$ 的简写。因此，QED 的总 Lagrangian 为

$$\mathcal{L}_{\text{QED}}=\bar{\psi}\left(i\not{D}-m\right)\psi-\frac{1}{4}F^{2} \tag{129}$$

注意，现在物质场和规范场都是动力学自由度。

QED Lagrangian 具有局域规范不变性。因此，它也具有局域守恒流。事实上，前面用来证明如果存在连续的全局对称性，就存在守恒 (Noether) 流的论点，同样适用于规范不变的 Lagrangian。事实上，在任意的无穷小规范变换下

$$\delta\psi=i\theta\psi\qquad\delta\bar{\psi}=-i\theta\bar{\psi}\qquad\delta A_{\mu}=\frac{1}{e}\partial_{\mu}\theta \tag{130}$$

QED Lagrangian 保持不变（即 $\delta\mathcal{L}=0$）。$\mathcal{L}$ 的任意变分为

$$\delta\mathcal{L}=\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\psi}\delta\psi+\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_{\mu}\psi}\delta\partial_{\mu}\psi+\left(\psi\leftrightarrow\bar{\psi}\right)+\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_{\mu}A_{\nu}}\delta\partial_{\mu}A_{\nu}+\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta A_{\mu}}\delta A_{\mu} \tag{131}$$

利用运动方程和规范变换形式后，$\delta\mathcal{L}$ 可以写成以下形式

$$\delta\mathcal{L}=\partial_{\mu}\left[j^{\mu}\left(x\right)\theta\left(x\right)\right]-\frac{1}{e}F^{\mu\nu}\left(x\right)\partial_{\mu}\partial_{\nu}\theta\left(x\right)+\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta A_{\mu}}\frac{1}{e}\partial_{\mu}\theta\left(x\right) \tag{132}$$

其中，$j^{\mu}\left(x\right)$ 是电子数流：

$$j^{\mu}=i\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\delta\partial_{\mu}\psi}\psi-\bar{\psi}\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_{\mu}\bar{\psi}}\right) \tag{133}$$

对于平滑的规范变换 $\theta\left(x\right)$，由于场张量 $F_{\mu\nu}$ 的反对称性，式 (132) 中的 $F^{\mu\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu}\theta$ 项消失了。因此可以写出

$$\delta\mathcal{L}=\theta\left(x\right)\partial_{\mu}j^{\mu}\left(x\right)+\partial_{\mu}\theta\left(x\right)\left[j^{\mu}\left(x\right)+\frac{1}{e}\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta A_{\mu}\left(x\right)}\right] \tag{134}$$

第一项告诉我们，由于无穷小规范变换 $\theta\left(x\right)$ 是任意的，所以局域的 Dirac 流 $j^{\mu}\left(x\right)$ 是守恒的（即 $\partial_{\mu}j^{\mu}=0$）。

用以下关系式定义电荷（或规范）流 $j^{\mu}\left(x\right)$

$$J^{\mu}\left(x\right)\equiv\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta A_{\mu}\left(x\right)} \tag{135}$$

即进入规范场 A_μ 运动方程（即 Maxwell 方程）的流。由于无穷小规范变换的变化也是任意的，因此需要式 (134) 中第二项消失，这告诉我们电荷流和数量流的关系为

$$J_\mu(x) = -ej_\mu(x) = -e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi \tag{136}$$

这一关系告诉我们，既然 $j^\mu(x)$ 是局域守恒的，那么 Q_0 也是全局守恒的，

$$Q_0 = \int d^3x j_0(x) \equiv \int d^3x \psi^\dagger(x)\psi(x) \tag{137}$$

这意味着电荷 Q 全局守恒：

$$Q \equiv -eQ_0 = -e\int d^3x\psi^\dagger(x)\psi(x) \tag{138}$$

这一特性证明了将耦合常数 e 解释为电荷是正确的。特别是，式 (125) 的规范变换告诉我们，物质场 $\psi(x)$ 代表了携带元电荷 $\pm e$ 的激发。从这个角度看，电荷可以被视为量子数。这种观点在强耦合极限的量子理论中非常有用。此时在特殊情况下，激发可能会获得不寻常的量子数。这不是 QED 的情况，但却是许多一维和二维空间理论的情况，可应用于凝聚态系统，如聚乙炔，或强磁场中的二维电子气（即分数量子 Hall 效应），或有磁单极子的规范理论。

7.2 量子色动力学

量子色动力学 (QCD) 是强子物理中强相互作用的规范场理论。在这一理论中，强子的基本成分夸克由 Dirac 旋量场 $\psi^i_\alpha(x)$ 表示。该理论还包含一组代表胶子的规范场 $A^a_\mu(x)$。夸克场既有 Dirac 指标 $\alpha = 1, \cdots, 4$，也有色指标 $i = 1, \cdots, N_c$，其中 N_c 是色的数量。在粒子物理中的弱相互作用、强相互作用和电磁相互作用的标准模型中，以及在 QCD 中，另外还有 $N_f = 6$ 种味的夸克，分为三代，每代由一种味指数标记，以及六种味的轻子，也分为三代。味对称性是理论的全局对称性。

假定夸克在规范（或色）群 G 的基础表示下发生变换，例如 $SU(N_c)$。理论在规范变换群下是不变的。在 QCD 中，色群是 $SU(3)$，因此 $N_c = 3$。色对称性是一种非 abelian 规范对称性。要确保局域规范不变性，就需要规范场 A_μ。在分量形式中，有 $A_\mu = A^a_\mu\lambda^a$，其中 λ^a 是 $SU(N_c)$ 的生成元。因此，$a = 1, \cdots, D(SU(N_c))$，且 $D(SU(N_c)) = N_c^2 - 1$。对于 $SU(3)$，$N_c^2 - 1 = 8$，因此有八个生成元。

Lagrangian 的规范不变物质项 $\mathcal{L}_{\text{matter}}$ 是

$$\mathcal{L}_{\text{matter}}\left(\psi, \bar{\psi}, A\right) = \bar{\psi}\left(i\not{D} - m\right)\psi \tag{139}$$

其中 $\not{D} = \not{\partial} - ig\not{A} \equiv \not{\partial} - ig\not{A}^a\lambda^a$ 是协变导数。Lagrangian 的规范场项 $\mathcal{L}_{\text{gauge}}$，

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}}(A) = -\frac{1}{4}\text{tr}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \equiv -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_a \tag{140}$$

是 Yang-Mills Lagrangian。QCD 的总 Lagrangian 为

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}}=\mathcal{L}_{\text{matter}}\left(\psi,\bar{\psi},A\right)+\mathcal{L}_{\text{gauge}}\left(A\right) \tag{141}$$

能定义色荷吗？由于色群是非 abelian 的，所以它有不止一个生成元。之前已经证明，群中有多少个生成元，就有多少个守恒流。现在，在一般情况下，群中的生成元互不对易。例如，在 $SU(2)$ 中，只有一个对角生成元 J_3，而 $SU(3)$ 中只有两个对角生成元，以此类推。能否同时定义所有的全局荷 Q^a？

$$Q^a\equiv\int d^3x\psi^\dagger\left(x\right)\lambda^a\psi\left(x\right) \tag{142}$$

容易证明，任何一对荷的 Poisson 括号一般都不为零。当把理论量子化时，荷 Q^a 遵循与群生成元本身相同的对易关系。因此，在量子理论中，唯一可以分配给态的荷恰好与标记表示的量子数相同。因此，如果群是 $SU(2)$，就只能给态分配 Casimir 算符平方 $\mathbf{J}^2$ 和投影 J_3 的值。类似的限制也适用于 $SU(3)$ 和其他 Lie 群。

8 时空对称性和能量-动量张量

目前为止只考虑了内部对称性的作用。现在转向时空对称性，考虑坐标变换的作用。在这种更普遍的情况下，我们不得不要求作用量的不变性，而不仅仅是 Lagrangian 的不变性，就像对内部对称性所做的那样。

有三个连续时空对称性很重要：(1) 平移不变性；(2) 旋转不变性；(3) 时间同质性。旋转是 Lorentz 变换的一个子群，而空间和时间平移则是不均匀 Lorentz 变换（在相对论情况下）和 Galilean 变换（在非相对论情况下）的例子。不均匀 Lorentz 变换也组成了一个群，称为 Poincaré 群。注意，上一节中讨论的变换是更一般坐标变换的特殊情况。然而重要的是，在大多数情况下，一般坐标变换并不是任意系统的对称性。它们是广义相对论的对称性。

下面将考虑系统对无穷小坐标变换的响应，其形式为

$$x'_\mu=x_\mu+\delta x_\mu \tag{143}$$

其中 δx_μ 可以是时空点 x_μ 的函数。在坐标变换下，场的变化为

$$\phi\left(x\right)\to\phi'\left(x'\right)=\phi\left(x\right)+\delta\phi\left(x\right)+\partial_\mu\phi\delta x^\mu \tag{144}$$

其中，$\delta\phi$ 是 ϕ 在没有改变坐标的情况下的变化（即泛函变化）。在这种记号中，通过一个常矢量 a_μ 进行的均匀无穷小平移为 $\delta x_\mu=a_\mu$，绕空间轴的无穷小旋转为 $\delta x_0=0$ 和 $\delta x_i=\epsilon_{ijk}\theta_jx_k$。

一般来说，在坐标和场都任意变化的情况下，系统的作用量并不是不变的。事实上，在任意改变坐标 $x_\mu \to x'_\mu(x_\mu)$ 的情况下，体积元 d^4x 不是 $x_\mu \to x'_\mu(x_\mu)$，体积元 d^4x 并不是不变的，而是通过一个乘法因子发生变化，其形式为

$$d^4x' = d^4xJ \tag{145}$$

其中 J 是坐标变换的 Jacobian

$$J = \frac{\partial x'_1 \cdots x'_4}{\partial x_1 \cdots x_4} \equiv \left|\det\left(\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu}\right)\right| \tag{146}$$

对于无穷小变换 $x'_\mu = x_\mu + \delta x_\mu(x)$ 有

$$\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu} = g^\nu_\mu + \partial^\nu \delta x_\mu \tag{147}$$

由于 δx_μ 较小，Jacobian 近似为

$$J = \left|\det\left(\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu}\right)\right| = \left|\det\left(g^\nu_\mu + \partial^\nu \delta x_\mu\right)\right| \approx 1 + \operatorname{tr}\left(\partial^\nu \delta x_\mu\right) + O\left(\delta x^2\right) \tag{148}$$

所以

$$J \approx 1 + \partial^\mu \delta x_\mu + O\left(\delta x^2\right) \tag{149}$$

一般来说 Lagrangian 本身并不是不变的。例如，尽管我们总是对 Lagrangian 不是 x 的显式函数的系统感兴趣，但在给定的坐标变换下，这些系统一般都不是不变的。而且，在坐标变化的情况下，场也可能发生变化。因此，$\delta\mathcal{L}$ 一般不为零。

$\mathcal{L}$ 的最一般的变分是

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \mathcal{L} \delta x^\mu + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi}\delta\phi + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi}\delta\partial_\mu\phi \tag{150}$$

如果 ϕ 服从运动方程，

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi} = \partial_\mu \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi} \tag{151}$$

则服从运动方程的解的一般变化 $\delta\mathcal{L}$ 为

$$\delta\mathcal{L} = \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L} + \partial_\mu\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi}\delta\phi\right) \tag{152}$$

作用量的总变化是两项总和

$$\delta S = \delta\int d^4x\mathcal{L} = \int \delta d^4x\mathcal{L} + \int d^4x\delta\mathcal{L} \tag{153}$$

其中，积分测度的变化是由于 Jacobian 因子引起的，

$$\delta d^4x = d^4x\partial_\mu \delta x^\mu \tag{154}$$

因此，δS 为

$$\delta S=\int d^4x\left[\left(\partial_\mu\delta x^\mu\right)\mathcal{L}+\delta x^\mu\partial_\mu\mathcal{L}+\partial_\mu\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi}\delta\phi\right)\right] \tag{155}$$

由于 ϕ 的总变分 $\delta_T\phi$ 是场的泛函变化加上坐标变换引起的场的变化之和，

$$\delta_T\phi\equiv\delta\phi+\partial_\mu\phi\delta x^\mu \tag{156}$$

可以把 δS 写成两个贡献之和：一个是坐标变化引起的，另一个是场的泛函变化引起的：

$$\delta S=\int d^4x\left[\left(\partial_\mu\delta x^\mu\right)\mathcal{L}+\delta x^\mu\partial_\mu\mathcal{L}+\partial_\mu\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi}\left(\delta_T\phi-\partial_\nu\phi\delta x^\nu\right)\right)\right] \tag{157}$$

因此，对于作用量的变化，有

$$\delta S=\int d^4x\left\{\partial_\mu\left[\left(g^\mu_\nu\mathcal{L}-\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi}\partial_\nu\phi\right)\delta x^\nu\right]+\partial_\mu\left[\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi}\delta_T\phi\right]\right\} \tag{158}$$

在讨论内部对称性的情况时已经遇到过第二项。第一项表示坐标改变后作用量 S 的变化。

现在举几个具体的例子。为简化问题只考虑坐标变换的影响。为简单起见这里只讨论标量场的情况。

8.1 时空平移

在均匀无穷小平移 $\delta x_\mu=_\mu$ 的情况下，场 ϕ 不会发生变化：

$$\delta_T\phi=0 \tag{159}$$

现在作用量的变化是

$$\delta S=\int d^4x\partial_\mu\left(g^{\mu\nu}\mathcal{L}-\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi}\partial^\nu\phi\right)a^\nu \tag{160}$$

对于一个孤立且平移不变的系统来说，在重新定义坐标系原点的情况下，作用量一定不会改变。因此 $\delta S=0$。由于 a^μ 是任意的，因此张量 $T^{\mu\nu}$

$$T^{\mu\nu}\equiv-g^{\mu\nu}\mathcal{L}+\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi}\partial^\nu\phi \tag{161}$$

守恒：

$$\partial_\mu T^{\mu\nu}=0 \tag{162}$$

张量 $T^{\mu\nu}$ 被称为能量-动量张量。命名的原因如下。由于 $T^{\mu\nu}$ 是局域守恒的，根据 Noether 定理，可以定义 4-矢量 P^ν

$$P^\nu=\int d^3xT^{0\nu}\left(\mathbf{x},x_0\right) \tag{163}$$

这是一个运动常量。具体而言，P^0 为

$$P^0 = \int d^3x T^{00}(\mathbf{x}, x_0) \equiv \int d^3x \left[-\mathcal{L} + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_0 \phi} \partial^0 \phi \right] \tag{164}$$

但 $\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_0 \phi}$ 就是正则动量 $\Pi(x)$：

$$\Pi(x) = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_0 \phi} \tag{165}$$

很容易认识到，P^0 的定义式 (164) 中括号内的量就是 Hamiltonian 密度 $\mathcal{H}$：

$$\mathcal{H} = \Pi \partial^0 \phi - \mathcal{L} \tag{166}$$

因此，P^ν 的时间分量就是系统的总能量：

$$P^0 = \int d^3x \mathcal{H} \tag{167}$$

空间分量 P^j 为

$$P^j = \int d^3x T^{0j} = \int d^3x \left[-g^{0j} \mathcal{L} + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_j \phi} \partial^j \phi \right] \tag{168}$$

因此由于 $g^{0j} = 0$，得到

$$\mathbf{P} = \int d^3x \Pi(x) \boldsymbol{\partial} \phi(x) \tag{169}$$

矢量 $\mathbf{P}$ 等于总线动量，因为 (1) 它是运动常量，(2) 它是无穷小空间平移的生成元。出于同样的原因，我们将把分量 $T^{0j}(x)$ 确定为线动量密度 $\mathcal{P}^j(x)$。必须强调的是，正则动量 $\Pi(x)$ 和总线动量密度 $\mathcal{P}^j$ 显然是完全不同的物理量。正则动量是一个与 ϕ 场正则共轭的场，而总动量则是储存在场内的线动量（即质心的线动量）。

8.2 转动

如果作用量在全局无穷小 Lorentz 变换下是不变的，其中空间转动是其中一种特殊情况，

$$\delta x_\mu = \omega_\mu^\nu x_\nu \tag{170}$$

其中 ω_μ^ν 是无穷小且反对称的，那么作用量的变分为零：$\delta S = 0$。如果 ϕ 是标量场，那么 $\delta_T \phi$ 也为零。旋量场或矢量场则不然，它们会在 Lorentz 变换下发生变换。由于这些场的变换特性，下文定义的角动量张量将缺少代表场的自旋的部分（对于标量场自旋消失）。这里只考虑标量的情况。

由于标量场 $\delta_T \phi = 0$，可发现

$$\delta S = 0 = \int d^4x \partial_\mu \left[\left(g^{\mu\nu} \mathcal{L} - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \phi} \partial^\nu \phi \right) \omega^{\nu\rho} x_\rho \right] \tag{171}$$

由于 $\omega^{\nu\rho}$ 是任意的常量，括号中的量也必须定义为守恒流。

定义张量 $M^{\mu\nu\rho}$ 为

$$M^{\mu\nu\rho} \equiv T^{\mu\nu} x^{\rho} - T^{\mu\rho} x^{\nu} \tag{172}$$

式 (171) 中括号内的量变为 $\frac{1}{2}\omega_{\nu\rho} M^{\mu\nu\rho}$。因此对于任意常数 ω，可发现张量 $M^{\mu\nu\rho}$ 是局域守恒的：

$$\partial_{\mu} M^{\mu\nu\rho} = 0 \tag{173}$$

特别地，变换

$$\delta x_0 = 0 \qquad \delta x_j = \omega_{jk} x_k \tag{174}$$

表示绕空间轴的无穷小转动，

$$\omega_{jk} = \epsilon_{jkl} \theta_l \tag{175}$$

其中 θ_l 是三个无穷小 Euler 角。因此，我们怀疑 $M^{\mu\nu\rho}$ 必须与总角动量有关。事实上，流 $M^{\mu\nu\rho}$ 的局域守恒会导致张量 $L^{\nu\rho}$ 的全局守恒：

$$L^{\nu\rho} \equiv \int d^3 x M^{0\nu\rho} \left(\mathbf{x}, x_0\right) \tag{176}$$

具体而言，$L^{\nu\rho}$ 的空间分量为

$$\begin{aligned} L_{jk} &= \int d^3 x \left(T_{0j}(x) x_k - T_{0k}(x) x_j\right) \\ &= \int d^3 x \left(\mathcal{P}_j(x) x_j - \mathcal{P}_k(x) x_j\right) \end{aligned} \tag{177}$$

如果用（赝）矢量 L_j 表示

$$L_j \equiv \frac{1}{2} \epsilon_{jkl} L_{kl} \tag{178}$$

可得

$$L_j \equiv \int d^3 x \epsilon_{jkl} x_k \mathcal{P}_l(x) \equiv \int d^3 x \ell_j(x) \tag{179}$$

矢量 L_j 是无穷小转动的生成元，因此与总角动量相等，而 $\ell_j(x)$ 则是相应的（空间）角动量密度。注意，由于处理的是标量场，因此角动量密度不存在自旋贡献。

式 (176) 中的广义角动量张量 $L^{\nu\rho}$ 并非平移不变的，因为坐标系原点位移 a_μ 时，$L^{\nu\rho}$ 会发生 $a^{\nu} P^{\rho} - a^{\rho} P^{\nu}$ 的变化。真正的固有角动量由 Pauli-Lubanski 矢量 W^{μ} 给出，

$$W^{\mu} = -\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \frac{L^{\nu\lambda} P^{\rho}}{\sqrt{P^2}} \tag{180}$$

在 $\mathbf{P} = 0$ 的静止系中，它还原为角动量。

最后，如果角动量张量 $M^{\mu\nu\lambda}$ 的形式为

$$M^{\mu\nu\lambda} = T^{\mu\nu} x^{\lambda} - T^{\mu\lambda} x^{\nu} \tag{181}$$

那么能量-动量张量 $T^{\mu\nu}$ 和角动量张量 $M^{\mu\nu\lambda}$ 的守恒共同导致了能量-动量张量必须是对称的二阶张量的条件：

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu} \tag{182}$$

因此得出结论，角动量守恒要求标量场的能量-动量张量 $T^{\mu\nu}$ 必须对称。

在式 (161) 中导出的 $T^{\mu\nu}$ 表达式并不明显对称。然而，如果 $T^{\mu\nu}$ 是守恒的，那么“改进的”张量 $\tilde{T}^{\mu\nu}$

$$\tilde{T}^{\mu\nu}=T^{\mu\nu}+\partial_\lambda K^{\mu\nu\lambda} \tag{183}$$

也是守恒的，条件是张量 $K^{\mu\nu\lambda}$ 在 (μ,λ) 和 (ν,λ) 中是反对称的。总是有可能找到这样一个张量 $K^{\mu\nu\lambda}$ 来使 $T^{\mu\nu}$ 对称。改进后的对称的能量-动量张量称为 Belinfante 能量-动量张量。

特别是对于标量场 $\phi(x)$ 而言，其 Lagrangian 密度 $\mathcal{L}$ 为

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi\right)^2-V(\phi) \tag{184}$$

局域守恒的能量-动量张量 $T^{\mu\nu}$ 是

$$T^{\mu\nu}=-g^{\mu\nu}\mathcal{L}+\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi}\partial^\nu\phi\equiv-g^{\mu\nu}\mathcal{L}+\partial^\mu\phi\partial^\nu\phi \tag{185}$$

这是对称的。守恒的能量-动量 4-矢量为

$$P^\mu=\int d^3x\left(-g^{0\mu}\mathcal{L}+\partial^0\phi\partial^\mu\phi\right) \tag{186}$$

因此发现

$$P^0=\int d^3x\left(\Pi\partial_0\phi-\mathcal{L}\right)=\int d^3x\left[\frac{1}{2}\Pi^2+\frac{1}{2}\left(\nabla\phi\right)^2+V(\phi)\right] \tag{187}$$

是场的总能量，且

$$\mathbf{P}=\int d^3x\Pi(x)\nabla\phi(x) \tag{188}$$

是场的线动量 $\mathbf{P}$。两者都是运动常量。

9 电磁场的能量-动量张量

对于 Maxwell 场 A_μ 的情况，直接应用这些方法可以得到一个能量-动量张量 $T^{\mu\nu}$，其形式为

$$\begin{aligned}T_{\mu\nu}&=-g^{\mu\nu}\mathcal{L}+\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\nu A_\lambda}\partial^\mu A_\lambda\\&=\frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}-F^{\nu\lambda}\partial^\mu A_\lambda\end{aligned} \tag{189}$$

它服从 $\partial_\mu T^{\mu\nu}=0$，因此是局域守恒的。然而，这个张量并不是规范不变的。可以利用 $T^{\mu\nu}$ 定义中的模糊性，构建一个规范不变且守恒的能量-动量张量。因此，如果选择 $K_{\mu\nu\lambda}=F_{\nu\lambda}A_\mu$，它在指数 ν 和 λ 上是不对称的，就可以构造出所需的规范不变且守恒的能量-动量张量，

$$\tilde{T}^{\mu\nu}=\frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^2-F^\nu_\lambda F^{\mu\lambda} \tag{190}$$

其中使用了自由电磁场的运动方程，$\partial^\lambda F_{\nu\lambda}=0$。注意，这个“改进的”能量-动量张量既是规范不变的，也是对称的。

由此发现 4-矢量

$$P^\mu=\int_{x_0\ \text{fixed}} d^3x\tilde{T}^{\mu 0} \tag{191}$$

是运动常量。因此可以确定

$$P^0=\int_{x_0\ \text{fixed}} d^3x\tilde{T}^{00}=\int_{x_0\ \text{fixed}} d^3x\frac{1}{2}\left(\mathbf{E}^2+\mathbf{B}^2\right) \tag{192}$$

为 Hamiltonian，且

$$P^i=\int_{x_0\ \text{fixed}} d^3x\tilde{T}^{i0}=\int_{x_0\ \text{fixed}} d^3x\left(\mathbf{E}\times\mathbf{B}\right)_i \tag{193}$$

为电磁场的线动量（或 Poynting 矢量）。

10 能量-动量张量和几何变化

能量-动量张量 $T^{\mu\nu}$ 出现在经典场论中，是物理系统在空间和时间上平移不变性的结果。上一节中看到，对于标量场，$T^{\mu\nu}$ 是一个对称张量，这是角动量守恒的结果。其定义并不要求 $T^{\mu\nu}$ 具有任何确定的对称性。然而，总是有可能通过添加一个适当选择的反对称守恒张量来修正 $T^{\mu\nu}$，从而找到对称版本的 $T^{\mu\nu}$。鉴于这一事实，我们自然会问是否有一种方法可以定义能量-动量张量使其始终对称？如果要考虑包含非标量场系统的理论，这个问题就变得非常重要。

我们可以把 $T^{\mu\nu}$ 看作是由于系统所处的几何发生变化而导致的作用量变化。经典物理学中，当一个物体以某种方式形变时，一般来说它的能量会增加，因为必须对物体做一些功才能使它形变。物体的形变是几何的变化，在这种变化中物体的各个组成部分都在发生变化。这种几何变化的例子包括剪切、扩张、弯曲和扭曲。与此相反，有些变化不耗费任何能量，因为它们是对称操作。对称操作的例子有平移和旋转。这些对称操作可以看作是物体各部分坐标的简单变化，不会改变物体的几何属性（如不同点之间的距离和角度）。因此，坐标变换不会改变系统的能量。同类论证适用于任何动力学系统。在最一般的情况下，必须考虑保持作用量不变的变换。这就需要考虑时空几何的变化如何影响动力学系统的作用量。

空间（和时空）的度规张量编码了系统演化的几何信息。度规张量是对称张量，它规定了如何测量一对邻近点 x 和 $x+dx$ 之间的距离 $|ds|$：

$$ds^2=g^{\mu\nu}\left(x\right)dx_\mu dx_\nu \tag{194}$$

在坐标的任意局域变化 $x_\mu\to x_\mu+\delta x_\mu$ 下，度规张量发生如下变化：

$$g'_{\mu\nu}\left(x'\right)=g_{\lambda\rho}\left(x\right)\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \tag{195}$$

对于无穷小变化，度规张量的泛函变化 $\delta g_{\mu\nu}$ 为

$$\delta g_{\mu\nu}=-\frac{1}{2}\left(g_{\mu\lambda}\partial^{\nu}\delta x_{\lambda}+g_{\lambda\nu}\partial^{\mu}\delta x_{\lambda}+\partial^{\lambda}g_{\mu\nu}\delta x_{\lambda}\right) \tag{196}$$

在坐标变换下不变的体积元为 $d^4x\sqrt{g}$，其中 g 是度规张量的行列式。

坐标变换会改变时空的度规，但不会改变作用量。物理或几何变化是度规张量的变化，而不是由坐标变换引起的。对于具有度规张量 $g^{\mu\nu}(x)$ 的空间中的系统，这里不一定是 Minkowski（或 Euclidean）度规，作用量的变化是度规无穷小变 $\delta g^{\mu\nu}(x)$ 的的线性函数（即“Hooke 定律”）。因此，可以将任意无穷小的度规变化引起的作用量变化写成以下形式

$$\delta S=\int d^4x\sqrt{g}T^{\mu\nu}(x)\,\delta g_{\mu\nu}(x) \tag{197}$$

下面将把比例常数，即张量 $T^{\mu\nu}$ 确定为守恒的能量-动量张量。这一定义意味着 $T^{\mu\nu}$ 可被视为作用量对度规的导数

$$T^{\mu\nu}(x)\equiv\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}(x)} \tag{198}$$

由于度规张量是对称的，因此这个定义总是产生一个对称的能量-动量张量。

为证明这个能量-动量张量的定义与在上一节中得到的定义一致（这并不是唯一的！），必须证明刚刚定义的 $T^{\mu\nu}$ 形式是坐标变换的守恒流。在坐标的任意局域变化下，令距离 ds 保持不变，度规张量按式 (196) 中给出的 $\delta g_{\mu\nu}$ 发生变化。在这种情况下，作用量的变化 δS 必须为零。如果我们用 δS 代替 $\delta g_{\mu\nu}$ 的表达式，那么分部积分就会得到一个守恒定律。事实上，对于平直度规的特殊情况，例如 Minkowski 或 Euclidean 度规，变化 δS 是

$$\delta S=-\frac{1}{2}\int d^4xT^{\mu\nu}(x)\left(g_{\mu\lambda}\partial_{\nu}\delta x^{\lambda}+g_{\lambda\nu}\partial_{\mu}\delta x^{\lambda}\right) \tag{199}$$

因为对于全局坐标变换，Jacobian 因子 $\sqrt{g}$ 和时空测度 d^4x 都是常数。因此，如果 δS 在任意变化 δx 时为零，张量 $T^{\mu\nu}(x)$ 必须是局域守恒流：即 $\partial_{\mu}T^{\mu\nu}(x)=0$。然而注意，只有当空间不具有一种称为挠率的性质时，能量-动量张量才能对称。

最后注意，能量-动量张量的这一定义还使我们能够将 $T^{\mu\nu}$ 的空间分量确定为系统的应力-能量张量。事实上，对于不随时间变化的几何变化而言，作用量的变化可以简化为系统总能量的变化。因此，能量-动量张量的空间分量告诉我们，对于几何的特定形变，总能量发生了多大变化。而这恰恰就是应力-能量张量！