量子场论 - 2
经典场论

Notes from E. Fradkin (2021)

在构建理论时，将使用的唯一指导原则是 (a) 对称性和 (b) 广义最小作用量原理。

1 相对论不变性

在第 1 章中，我们研究了相对论性波动方程的三个例子。它们是经典电磁学的 Maxwell 方程组、Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程。Maxwell 方程组主导矢量场即矢势 $A^{\mu}(x)=\left(A^{0}(x), \mathbf{A}(x)\right)$ 的动力学，而 Klein-Gordon 方程描述标量场 $\phi(x)$ 的激发，Dirac 方程主导四分量旋量场 $\psi_{\alpha}(x)$，$(\alpha=0,1,2,3)$ 的行为。在 Lorentz 变换群（Lorentz 群）的作用下，这些场中的每一个都以非常明确的方式发生变换。Lorentz 群被定义为 Minkowski 时空 $\mathcal{M}$ 到自身的线性变换 Λ 的群：$\Lambda: \mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}$，这样新坐标与旧坐标通过线性 (Lorentz) 变换相关联

$$x'^{\mu}=\Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu} \tag{1}$$

Lorentz 变换的时空分量 Λ_{i}^{0} 就是 Lorentz boost。Lorentz boost 将以相对速度 $\mathbf{v}$ 运动的惯性参照系相互联系起来。沿 x^{1} 轴的 Lorentz boost 具有熟悉的形式

$$\begin{aligned}
x^{0\prime} &= \frac{x^{0}+v x^{1}/c}{\sqrt{1-v^{2}/c^{2}}} \\
x^{1\prime} &= \frac{x^{1}+v x^{0}/c}{\sqrt{1-v^{2}/c^{2}}} \\
x^{2\prime} &= x^{2} \\
x^{3\prime} &= x^{3}
\end{aligned} \tag{2}$$

其中 $x^{0}=ct$，$x^{1}=x$，$x^{2}=y$，$x^{3}=z$（注意：上标表示分量，而不是幂次！）。如果使用符号 $\gamma=\left(1-v^{2}/c^{2}\right)^{-1/2} \equiv \cosh \alpha$，就可以把 Lorentz boost 写成一个矩阵：

$$\begin{pmatrix} x^{0\prime} \\ x^{1\prime} \\ x^{2\prime} \\ x^{3\prime} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cosh \alpha & \sinh \alpha & 0 & 0 \\ \sinh \alpha & \cosh \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^{0} \\ x^{1} \\ x^{2} \\ x^{3} \end{pmatrix} \tag{3}$$

Λ_{j}^{i} 的空间分量是三维 Euclidean 空间的常规旋转 R。

无穷小 Lorentz 变换由 hermitian 算符产生

$$L_{\mu\nu}=i\left(x_{\mu}\partial_{\nu}-x_{\nu}\partial_{\mu}\right) \tag{4}$$

其中 $\partial_{\mu}=\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$，且 $\mu, \nu=0,1,2,3$。无穷小生成元 $L_{\mu\nu}$L 满足以下代数要求

$$\left[L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}\right]=i g_{\nu\rho} L_{\mu\sigma}-i g_{\mu\rho} L_{\nu\sigma}-i g_{\nu\sigma} L_{\mu\rho}+i g_{\mu\sigma} L_{\nu\rho} \tag{5}$$

其中，$g_{\mu\nu}$ 是平坦 Minkowski 时空的度规张量（见式 2.8）。这就是李群 $SO\,(3,1)$ 的代数。实际上，任何形式的算符

$$M_{\mu\nu} = L_{\mu\nu} + S_{\mu\nu} \tag{6}$$

其中 $S_{\mu\nu}$ 是满足式 (5) 代数的 4×4 矩阵，也是式 (2.122) 所定义的 $SO\,(3,1)$ 的生成元。

Lorentz 变换构成一个群，因为：(a) 两个 Lorentz 变换的乘积是一个 Lorentz 变换；(b) 存在一个恒等变换；(c) Lorentz 变换是可逆的。然而，一般情况下，两个变换是不对易的。因此，Lorentz 群是非 abelian 群。

Lorentz 群具有使相对论间隔保持不变的决定性质

$$x^2 \equiv x_0^2 - \mathbf{x}^2 = c^2t^2 - \mathbf{x}^2 \tag{7}$$

Euclidean 旋转群使 Euclidean 距离 $\mathbf{x}^2$ 不变，是 Lorentz 群的一个子群。旋转群用 $SO\,(3)$ 表示，Lorentz 群用 $SO\,(3,1)$ 表示。这个记号强调度规的符号有一个 + 号和三个-号。

线性变换的 $SO\,(3,1)$ 群在以下意义上是非紧凑的。首先考虑三维空间中的旋转群 $SO\,(3)$。$SO\,(3)$ 中的线性变换使得 Euclidean 距离（平方）$R^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ 不变。R 为定值的点集就是三维空间中半径为 R 的球体的二维表面，用 S_2 表示它。旋转群 $SO\,(3)$ 的元素与 S_2 上的点一一对应。单位半径的 2-球 S_2 的面积为 4π。那么我们说 $SO\,(3)$ 群的“体积”是有限的，等于 4π。具有有限体积的线性变换群被称为紧凑群。相比之下，Lorentz 群是线性变换的集合，用 $SO\,(3,1)$ 表示，它使相对论间隔 $x_\mu x^\mu$ 不变，它不是正定的。Lorentz boost 会沿着 Minkowski 时空的双曲线映射点。从这个意义上说，Lorentz 群是不紧凑的，因为它的“体积”是无限大的。

采用以下惯例和定义：

1) 度规张量：我们将使用 Minkowski 时空的标准（“Bjorken 和 Drell”）度规，其中度规张量 $g_{\mu\nu}$ 为

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

在这种记号下，无穷小相对论间隔为

$$ds^2 = dx^\mu dx_\mu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dx_0^2 - d\mathbf{x}^2 = c^2 dt^2 - d\mathbf{x}^2 \tag{9}$$

2) 4-矢量

i) x^μ 是逆变 4-矢量，$x^\mu = (ct, \mathbf{x})$

ii) x_μ 是协变 4-矢量，$x_\mu = (ct, -\mathbf{x})$

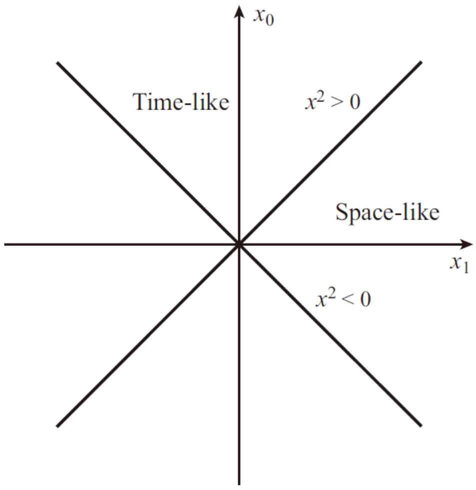

图 1: Minkowski 时空及其光锥。相对论间隔 $x^2 = x_0^2 - \mathbf{x}^2 > 0$ 的事件是类时的（与原点有因果关系），而 $x^2 = x_0^2 - \mathbf{x}^2 < 0$ 的事件是类空的，与原点没有因果关系。

iii) 协变矢量和逆变矢量（以及张量）通过度规张量 $g_{\mu\nu}$ 联系

$$A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu \tag{10}$$

iv) $\mathbf{x}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的矢量

v) $p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p}\right)$ 是能量-动量 4-矢量。因此，$p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2$ 是 Lorentz 标量。

3) 标量积：

$$p \cdot q = p_\mu q^\mu = p_0 q_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} \equiv p_\mu q_\nu g^{\mu\nu} \tag{11}$$

4) 梯度：$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ 和 $\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu}$。定义 d'Alambertian ∂^2 为

$$\partial^2 \equiv \partial^\mu \partial_\mu \equiv \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \nabla^2 \tag{12}$$

是一个 Lorentz 标量。我们使用时间单位 $[T]$ 和长度单位 $[L]$ 使得 $\hbar = c = 1$。因此，$[T] = [L]$，我们将使用厘米（或任何其他长度单位）这样的单位。

5) 间隔：Minkowski 时空中的间隔为 x^2：

$$x^2 = x_\mu x^\mu = x_0^2 - \mathbf{x}^2 \tag{13}$$

类时间隔的 $x^2 > 0$，而类空间隔的 $x^2 < 0$。

由于场是 Minkowski 空间到其他（适当选择的）空间的函数（或映射），自然要求场在 Lorentz 变换下具有简单的变换特性。例如，矢势 $A^\mu(x)$ 在 Lorentz 变换下类似于 4-矢量变换，也就是说，如果 $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$，那么 $A'^\mu(x') = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(x)$。换句话说，$A^\mu$ 的变换就像 x^μ。因此，它是一个矢量。所有矢量场都具有这一特性。相反，标量场 $\Phi(x)$ 在 Lorentz 变换下保持不变：

$$\Phi'(x') = \Phi(x) \tag{14}$$

4-旋量 $\psi_\alpha(x)$ 在 Lorentz 变换下发生变换。也就是说，存在一个诱导的 4×4 线性变换矩阵 $S(\Lambda)$，使得

$$S\left(\Lambda^{-1}\right)=S^{-1}(\Lambda) \tag{15}$$

和

$$\Psi'(\Lambda x)=S(\Lambda)\Psi(x) \tag{16}$$

2 Lagrangian、作用量和最小作用量原理

任何动力学系统的演化都是由其 Lagrangian 决定的。在广义坐标 q 所描述的粒子系统的经典力学中，Lagrangian L 是坐标 q 及其时间导数的可微函数。L 必须是可微的，否则，运动方程在时间上就不是局域的（即不能用微分方程来表示）。通过 Landau 和 Lifshitz 的论证，我们可以“推导”出 Lagrangian。例如，对于自由空间中的粒子，空间和时间的同质性、均匀性和各向同性要求 L 只是速度的绝对值 $|\mathbf{v}|$ 的函数。由于 $|\mathbf{v}|$ 不是 $\mathbf{v}$ 的可微函数，因此 Lagrangian 必须是 $\mathbf{v}^2$ 的函数。因此，$L=L\left(\mathbf{v}^2\right)$。原则上，我们没有理由认为 L 不能是加速度 $\mathbf{a}$（或更确切地说，$\mathbf{a}^2$）或其更高阶导数的函数。实验告诉我们，在经典力学中，只需指定质点的初始位置 $\mathbf{x}(0)$ 及其初始速度 $\mathbf{v}(0)$，即可确定系统的时间演化。因此，我们必须选择

$$L\left(\mathbf{v}^2\right)=\text{常量}+\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 \tag{17}$$

在经典物理学中，加常量是无关紧要的。自然地，$\mathbf{v}^2$ 的系数只是惯性质量的二分之一。

然而，在狭义相对论中，需要考虑的自然不变量不是 Lagrangian，而是作用量 S。对于自由粒子，相对论不变（即 Lorentz 不变）作用量必须涉及不变间隔，即适当长度 $ds=c\sqrt{1-\frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}dt$。因此，我们把相对论性有质量粒子的作用量写成

$$S=-mc\int_{s_i}^{s_f}ds=-mc^2\int_{t_i}^{t_f}dt\sqrt{1-\frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} \tag{18}$$

相对论性 Lagrangian 为

$$L=-mc^2\sqrt{1-\frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} \tag{19}$$

作幂级数展开，它包含 $\mathbf{v}^2/c^2$ 的所有幂次。不难看出，正则动量 $\mathbf{p}$ 是

$$\mathbf{p}=\frac{\partial L}{\partial\mathbf{v}}=\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}} \tag{20}$$

由此可知，哈密顿（或能量）为

$$H=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}}=\sqrt{\mathbf{p}^2c^2+m^2c^4} \tag{21}$$

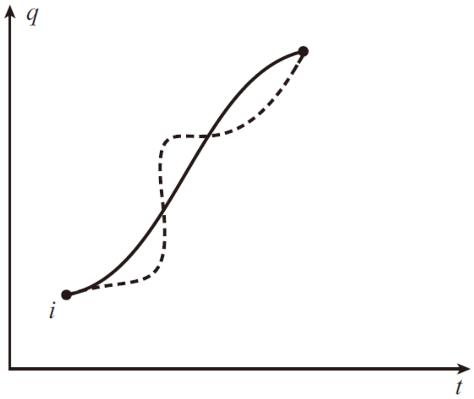

图 2: 最小作用量原理：实线为经典轨迹，是经典作用量的极值。虚线代表一种变分。

一旦找到 Lagrangian，经典运动方程就由最小作用量原理决定了。因此，我们构建了作用量 S

$$S=\int dtL\left(q,\dot{q}\right) \tag{22}$$

其中 $\dot{q}=\frac{dq}{dt}$，并要求物理轨迹 $q\left(t\right)$ 使动作量 S 平稳（即 $\delta S=0$）。S 的变分为

$$\delta S=\int_{t_i}^{t_f}dt\left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}\right) \tag{23}$$

分部积分后得到

$$\delta S=\int_{t_i}^{t_f}dt\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right)+\int_{t_i}^{t_f}dt\delta q\left[\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\right] \tag{24}$$

因此，我们得到

$$\delta S=\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right|_{t_i}^{t_f}+\int_{t_i}^{t_f}dt\delta q\left[\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\right] \tag{25}$$

如果我们假定变化量 q 是时间的任意函数，在初始和最终时间 t_i 和 t_f 上为零（即 $\delta q\left(t_i\right)=\delta q\left(t_f\right)=0$），我们会发现 $\delta S=0$ 的条件和唯一条件是式 (25) 的积分恒为零。因此

$$\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)=0 \tag{26}$$

这些就是运动方程或 Newton 方程。一般来说，决定使作用量平稳的轨迹的方程称为 Euler-Lagrange 方程。

3 标量场论

对于场论的情况可以用同样的方法来处理。首先考虑标量场 $\Phi\left(x\right)$ 的情况。作用量 S 在 Lorentz 变换下必须是不变的。由于我们要构造局域理论，自然可以假定 S 是以 Lagrangian 密度 $\mathcal{L}$ 的形式给出的：

$$S=\int d^4x\mathcal{L} \tag{27}$$

其中 $\mathcal{L}$ 是场及其导数的局域可微函数。这些假设反过来又保证了所得到的运动方程具有偏微分方程的形式。换句话说，动力学不允许超距作用。

由于 Minkowski 空间的体积元 d^4x 在 Lorentz 变换下是不变的，因此如果 $\mathcal{L}$ 是 Lorentz 不变的局域可微分函数，并且可以从场 $\Phi(x)$ 中构造出来，那么作用量 S 就是不变的。简单不变量是 $\Phi(x)$ 本身及其所有幂次。梯度 $\partial^\mu\Phi \equiv \frac{\partial\Phi}{\partial x_\mu}$ 不是不变式，但 d'Alambertian $\partial^2\Phi$ 是不变式。双线性项，如 $\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi$，也是 Lorentz 不变的，而且在改变 Φ 的符号时也是不变的。因此可以写出下面简单的 $\mathcal{L}$ 表达式：

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi - V(\Phi) \tag{28}$$

其中 $V(\Phi)$ 是某个势，我们可以假定它是场 Φ 的多项式函数。考虑一个简单的选择

$$V(\Phi) = \frac{1}{2}\bar{m}^2\Phi^2 \tag{29}$$

其中 $\bar{m} = mc/\hbar$。所以

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi - \frac{1}{2}\bar{m}^2\Phi^2 \tag{30}$$

这就是自由标量场的 Lagrangian 密度。顺便注意，我们本可以添加一个类似 $\partial^2\Phi$ 的项。但是，这个项除了在 $\Phi \to -\Phi$ 下为奇外，还是一个全发散项，因此，它只对边界条件有影响，而对运动方程没有影响。

最小作用量原理要求 S 在场 Φ 及其导数 $\partial_\mu\Phi$ 的任意变化下保持平稳。因此得到

$$\delta S = \int d^4x \left[\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Phi}\delta\Phi + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\Phi}\delta\partial_\mu\Phi\right] \tag{31}$$

注意，由于 $\mathcal{L}$ 是 Φ 的泛函，我们必须使用泛函导数（即时空各点的偏导数）。通过部分积分，得到

$$\delta S = \int d^4x\partial_\mu\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\Phi}\delta\Phi\right) + \int d^4x\delta\Phi\left[\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Phi} - \partial_\mu\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\Phi}\right)\right] \tag{32}$$

我们现在不必考虑初始条件和最终条件，而必须设想场 Φ 包含在某个非常大的时空中。总的发散项产生一个表面贡献。我们考虑在该表面上 $\delta\Phi = 0$ 的场配置。因此，Euler-Lagrange 方程为

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Phi} - \partial_\mu\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\Phi}\right) = 0 \tag{33}$$

更明确地说，我们发现

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Phi} = -\frac{\partial V}{\partial\Phi} \tag{34}$$

既然

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\Phi} = \partial^\mu\Phi \tag{35}$$

于是

$$\partial_\mu\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\Phi} = \partial_\mu\partial^\mu\Phi \equiv \partial^2\Phi \tag{36}$$

通过直接代换，我们得到了运动方程（或场方程）：

$$\partial^2\Phi + \frac{\partial V}{\partial \Phi} = 0 \tag{37}$$

选择

$$V(\Phi) = \frac{\bar{m}^2}{2}\Phi^2 \qquad \frac{\partial V}{\partial \Phi} = \bar{m}^2\Phi \tag{38}$$

场方程为

$$\left(\partial^2 + \bar{m}^2\right)\Phi = 0 \tag{39}$$

其中 $\partial^2 = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$。因此，我们发现自由有质量标量场 Φ 的运动方程为

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - \nabla^2\Phi + \bar{m}^2\Phi = 0 \tag{40}$$

如果常量 $\bar{m}$ 与 $\frac{mc}{\hbar}$ 一致，这就是 Klein-Gordon 方程。事实上，这些方程的平面波解为

$$\Phi = \Phi_0 e^{i(p_0x_0 - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x})/\hbar} \tag{41}$$

其中 p_0 和 $\mathbf{p}$ 通过色散关系相关联：

$$p_0^2 = \mathbf{p}^2c^2 + m^2c^4 \tag{42}$$

因此，对于每个动量 $\mathbf{p}$，都有两个解，一个频率为正，一个频率为负。在量子化理论中，激发的能量确实等于 $|p_0|$。注意，$\frac{1}{\bar{m}} = \frac{\hbar}{mc}$ 有长度单位并且等于质量为 m 的粒子的 Compton 波长。从现在起我们将使用 $\hbar = c = 1$ 和 $m = \bar{m}$ 的单位。

4 正则形式的经典场论

在经典力学中，使用 Hamiltonian 而非 Lagrangian 方法的正则形式通常很方便。对于粒子系统，正则形式的过程如下。给定一个 Lagrangian $L(q,\dot{q})$，正则动量 p 定义为

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = p \tag{43}$$

经典 Hamiltonian $H(p,q)$ 由 Legendre 变换定义

$$H(p,q) = p\dot{q} - L(q,\dot{q}) \tag{44}$$

如果 Lagrangian L 为速度 $\dot{q}$ 二次方且可分离，例如

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q) \tag{45}$$

那么 $H(p,q)$ 简单地由下式给出

$$H(p,q) = p\dot{q} - \left(\frac{m\dot{q}^2}{2} - V(q)\right) = \frac{p^2}{2m} + V(q) \tag{46}$$

其中

$$p=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}=m\dot{q} \tag{47}$$

这样，（守恒）量 H 就与系统的总能量相一致了。

该语言下最小作用量原理就变成了

$$\delta S=\delta\int Ldt=\delta\int\left[p\dot{q}-H\left(p,q\right)\right]dt=0 \tag{48}$$

因此

$$\int dt\left(\delta p\dot{q}+p\delta\dot{q}-\delta p\frac{\partial H}{\partial p}-\delta q\frac{\partial H}{\partial q}\right)=0 \tag{49}$$

通过分部积分得到

$$\int dt\left[\delta p\left(\dot{q}-\frac{\partial H}{\partial p}\right)+\delta q\left(-\frac{\partial H}{\partial q}-\dot{p}\right)\right]=0 \tag{50}$$

对任意变化 $\delta q\left(t\right)$ 和 $\delta p\left(t\right)$ 而言，只有在下列情况下才能满足这个条件

$$\dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p}\qquad \dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial q} \tag{51}$$

这就是 Hamilton 方程。

通过以下方式引入 q 和 p 的两个函数 A 和 B 的 Poisson 括号 $\{A,B\}_{PB}$

$$\{A,B\}_{PB}\equiv\frac{\partial A}{\partial q}\frac{\partial B}{\partial p}-\frac{\partial A}{\partial p}\frac{\partial B}{\partial q} \tag{52}$$

设 $F\left(q,p,t\right)$ 是 q、p 和 t 的某个可微函数，则 F 的总时间变化为

$$\frac{dF}{dt}=\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial q}\frac{dq}{dt}+\frac{\partial F}{\partial p}\frac{dp}{dt} \tag{53}$$

利用 Hamilton 方程可以得到以下结果

$$\frac{dF}{dt}=\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p}-\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q} \tag{54}$$

或用 Poisson 括号表示：

$$\frac{dF}{dt}=\frac{\partial F}{\partial t}+\{F,H\}_{PB} \tag{55}$$

特别地，

$$\frac{dq}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p}=\frac{\partial q}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p}-\frac{\partial q}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q}=\{q,H\}_{PB} \tag{56}$$

这是由于

$$\frac{\partial q}{\partial p}=0\qquad \frac{\partial q}{\partial q}=1 \tag{57}$$

此外，正则动量 p 的总变化率为

$$\frac{dp}{dt}=\frac{\partial p}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p}-\frac{\partial p}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q}\equiv-\frac{\partial H}{\partial q} \tag{58}$$

这是由于 $\frac{\partial p}{\partial q}=0$ 和 $\frac{\partial p}{\partial p}=1$。所以，

$$\frac{dp}{dt}=\{p,H\}_{PB} \tag{59}$$

注意，对于一个孤立的系统，H 与时间无关。那么

$$\frac{\partial H}{\partial t}=0 \tag{60}$$

且

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}+\{H,H\}_{PB}=0 \tag{61}$$

这是因为

$$\{H,H\}_{PB}=0 \tag{62}$$

因此，H 可以被视为无穷小时间平移的生成元。由于它在孤立系统中是守恒的，对孤立系统而言，$\frac{\partial H}{\partial t}=0$，因此我们确实可以将 H 与总能量相提并论。顺便注意，上述 Poisson 括号的定义意味着 q 和 p 满足以下条件

$$\{q,p\}_{PB}=1 \tag{63}$$

这种关系对于这些系统的量子化至关重要。

这一表述的大部分内容可以推广到场的情况。首先讨论具有 Lagrangian 密度 $\mathcal{L}\left(\Phi,\partial_\mu\Phi\right)$ 的标量场 Φ 的正则形式。选择 $\Phi\left(x\right)$ 作为（无限）正则坐标集。正则动量 $\Pi\left(x\right)$ 的定义是

$$\Pi\left(x\right)=\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_0\Phi\left(x\right)} \tag{64}$$

如果 Lagrangian 是 $\partial_\mu\Phi$ 的二次方，则正则动量 $\Pi\left(x\right)$ 简单地由以下公式给出

$$\Pi\left(x\right)=\partial_0\Phi\left(x\right)\equiv\dot{\Phi}\left(x\right) \tag{65}$$

Hamiltonian 密度 $\mathcal{H}\left(\Phi,\Pi\right)$ 是 $\Phi\left(x\right)$ 和 $\Pi\left(x\right)$ 的局域函数，其值为

$$\mathcal{H}\left(\Phi,\Pi\right)=\Pi\left(x\right)\partial_0\Phi\left(x\right)-\mathcal{L}\left(\Phi,\partial_0\Phi\right) \tag{66}$$

如果 Lagrangian 密度 $\mathcal{L}$ 有简单形式

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\Phi\right)^2-V\left(\Phi\right) \tag{67}$$

则 Hamiltonian 密度 $\mathcal{H}\left(\Phi,\Pi\right)$ 为

$$\mathcal{H}=\Pi\dot{\Phi}-\mathcal{L}\left(\Phi,\dot{\Phi},\partial_j\Phi\right)\equiv\frac{1}{2}\Pi^2\left(x\right)+\frac{1}{2}\left(\nabla\Phi\left(x\right)\right)^2+V\left(\Phi\left(x\right)\right) \tag{68}$$

如果势 $V\left(\Phi\right)\geqslant 0$，它显然是一个正定的量。对于自由有质量标量场来说就是这样，此 $V\left(\Phi\right)=\frac{m^2}{2}\Phi^2$。因此，无论频率的符号如何，有质量标量场理论的平面波解（即

Klein-Gordon 方程的解）的能量总是正的。事实上，最低能量状态只是 $\Phi =$ 常量。由平面波的线性叠加（即波包）构成的解具有正能量。因此，在场论中，能量总是正的。在量子理论中，在复数场的情况下，负频解与反粒子态相一致，它们的存在并不意味着理论可能不稳定。

正则场 $\Phi(x)$ 和正则动量 $\Pi(x)$ 满足等时 Poisson 括号 (PB) 关系：

$$\{\Phi(\mathbf{x}, x_0), \Pi(\mathbf{y}, x_0)\}_{PB} = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tag{69}$$

其中，$\delta(\mathbf{x})$ 是狄拉克 δ 函数，对 $\Phi(x)$ 和 $\Pi(x)$ 的任意两个泛函 A 和 B，Poisson 括号 $\{A, B\}_{PB}$ 的定义为

$$\{A, B\}_{PB} = \int d^3x \left[\frac{\delta A}{\delta\Phi(\mathbf{x}, x_0)}\frac{\delta B}{\delta\Pi(\mathbf{x}, x_0)} - \frac{\delta A}{\delta\Pi(\mathbf{x}, x_0)}\frac{\delta B}{\delta\Phi(\mathbf{x}, x_0)}\right] \tag{70}$$

这种方法可以扩展到标量场论以外的其他理论。最后注意，虽然 Lorentz 不变性在 Lagrangian 公式中是显而易见的，但在经典场的 Hamiltonian 公式中却并非如此。

5 Dirac 方程的场论

现在来谈旋量的场论问题。我们将讨论作为经典场论的旋量理论。事实证明，除非将其适当地量子化为旋量的 QFT，否则这一理论是不一致的。

重写 Dirac 方程，使相对论协变性显而易见

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \frac{\hbar c}{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla\Psi + \beta mc^2\Psi \equiv H_{\text{Dirac}}\Psi \tag{71}$$

算符 H_{Dirac} 为 Dirac Hamiltonian。

首先回顾到 4×4 hermitian 矩阵 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 β 应满足以下代数式

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij}I \qquad \{\alpha_i, \beta\} = 0\alpha_i^2 = \beta^2 = I \tag{72}$$

其中 I 是 4×4 单位矩阵。

该代数的一个简单表示是 2×2 块 (Dirac) 矩阵

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \tag{73}$$

其中，σ^i 矩阵是三个 2×2 Pauli 矩阵，

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{74}$$

且 I 是 2×2 的单位矩阵。这就是 Dirac 代数的 Dirac 表示。

现在可以方便地引入 Dirac gamma 矩阵：

$$\gamma^0=\beta \qquad \gamma^i=\beta\alpha^i \tag{75}$$

Dirac gamma 矩阵 γ^μ 具有分块形式

$$\gamma^0=\beta=\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \qquad \gamma^i=\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \tag{76}$$

并服从 Dirac 代数

$$\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}=2g^{\mu\nu}I \tag{77}$$

其中 I 是 4×4 单位矩阵。

以 gamma 矩阵表示，Dirac 方程的协变形式要简单得多

$$\left(i\gamma^\mu\partial_\mu-\frac{mc}{\hbar}\right)\Psi=0 \tag{78}$$

其中 Ψ 是 4-旋量。还习惯于引入记号（称为“Feynman 斜线”）

$$\not{a}\equiv a_\mu\gamma^\mu \tag{79}$$

利用 Feynman 斜线，可以将 Dirac 方程写成以下形式

$$\left(i\not{\partial}-\frac{mc}{\hbar}\right)\Psi=0 \tag{80}$$

从现在起，将使用 $\hbar=c=1$ 的单位。在这些单位中，能量的单位是长度 $^{-1}$，时间的单位是长度。

注意，如果满足 Dirac 方程，那么它也满足

$$\left(i\not{\partial}+m\right)\left(i\not{\partial}-m\right)\Psi=0 \tag{81}$$

还发现

$$\begin{aligned}\not{\partial}\cdot\not{\partial}&=\partial_\mu\partial_\nu\gamma^\mu\gamma^\nu=\partial_\mu\partial_\nu\left(\frac{1}{2}\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}+\frac{1}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\right)\\&=\partial_\mu\partial_\nu g^{\mu\nu}=\partial^2\end{aligned} \tag{82}$$

其中我们使用了对易子 $[\gamma^\mu,\gamma^\nu]$ 在指数 μ 和 ν 中是反对称的。因此，我们发现 4-旋量 Ψ 的每个分量也必须满足 Klein-Gordon 方程

$$\left(\partial^2+m^2\right)\Psi=0 \tag{83}$$

5.1 Dirac 方程的解

简要讨论一下 Dirac 方程的解的性质。首先考虑表示静止粒子的解。因此，Ψ 必须是空间常数，其所有空间导数必须消失。Dirac 方程变为

$$i\gamma^0 \frac{\partial \Psi}{\partial t} = m\Psi \tag{84}$$

其中 $t = x_0$ $(c = 1)$。引入双旋量 ϕ 和 χ

$$\Psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \tag{85}$$

发现 Dirac 方程可以简化为两个 2×2 的简单方程组：

$$i\frac{\partial \phi}{\partial t} = +m\phi \qquad i\frac{\partial \chi}{\partial t} = -m\chi \tag{86}$$

四个线性独立的解是

$$\phi_1 = e^{-imt} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \phi_2 = e^{-imt} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{87}$$

和

$$\chi_1 = e^{imt} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \chi_2 = e^{imt} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{88}$$

因此，上分量 ϕ 代表正能量 $+m$ 的解，而 χ 代表负能量 $-m$ 的解。解的额外两重简并性与粒子的自旋有关。

更一般地说，就双旋量 ϕ 和 χ 而言，Dirac 方程的形式为

$$i\frac{\partial \phi}{\partial t} = m\phi + \frac{1}{i}\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla\chi \tag{89}$$

$$i\frac{\partial \chi}{\partial t} = -m\chi + \frac{1}{i}\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla\phi \tag{90}$$

此外，在非相对论极限，形式上取 $c \to \infty$，它应还原为 Schrödinger-Pauli 方程。为此定义缓慢变化的振幅 $\tilde{\phi}$ 和 $\tilde{\chi}$：

$$\begin{aligned} \phi &= e^{-imt}\tilde{\phi} \\ \chi &= e^{-imt}\tilde{\chi} \end{aligned} \tag{91}$$

场 $\tilde{\chi}$ 很小，几乎是静态的。现在将看到，场 $\tilde{\phi}$ 描述了正能量接近 $+m$ 的解。以 $\tilde{\phi}$ 和 $\tilde{\chi}$ 表示，Dirac 方程变为

$$i\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} = \frac{1}{i}\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla\tilde{\chi} \tag{92}$$

$$i\frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial t} = -2m\tilde{\chi} + \frac{1}{i}\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla\tilde{\phi} \tag{93}$$

事实上，在这个极限中，式 (93) 的左侧比右侧小得多。因此可以近似

$$2m\tilde{\chi} \approx \frac{1}{i}\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla\tilde{\phi} \tag{94}$$

现在可以从式 (92) 中消除“小分量”$\tilde{\chi}$，从而发现 $\tilde{\phi}$ 满足

$$i\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\nabla^2\tilde{\phi} \tag{95}$$

这就是 Schrödinger-Pauli 方程。

5.2 守恒流

引入最后一个有用的记号。定义 $\bar{\Psi}$ 为

$$\bar{\Psi} = \Psi^\dagger\gamma^0 \tag{96}$$

我们可以用它写出 4-矢量 j^μ：

$$j^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi \tag{97}$$

这是守恒的，即

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \tag{98}$$

注意，j^μ 的时间分量就是密度

$$j^0 = \bar{\Psi}\gamma^0\Psi \equiv \Psi^\dagger\Psi \tag{99}$$

且 j^μ 的空间分量为

$$\mathbf{j} = \bar{\Psi}\boldsymbol{\gamma}\Psi = \Psi^\dagger\gamma^0\boldsymbol{\gamma}\Psi = \Psi^\dagger\boldsymbol{\alpha}\Psi \tag{100}$$

因此，Dirac 方程有一个相关的 4-矢量场 $j^\mu(x)$，它是守恒的，并服从局域连续性方程：

$$\partial_0 j_0 + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \tag{101}$$

然而不难发现，一般来说，密度 j_0 可以是正值也可以是负值。因此，这种流不能与概率流相关联（如在非相对论量子力学中）。相反，它与电荷密度和电流相关联。

5.3 相对论协变性

设 Λ 为洛伦兹变换。设 $\Psi(x)$ 是惯性系中的一个旋量场，而 $\Psi'(x')$ 是变换后的系中的同一个 Dirac 旋量场。如果 Lorentz 变换

$$x'_\mu = \Lambda_\mu^\nu x_\nu \tag{102}$$

在自旋空间中引入一个线性变换 $S(\Lambda)$

$$\Psi'_\alpha(x') = S(\Lambda)_{\alpha\beta}\Psi_\beta(x) \tag{103}$$

使得变换后的 Dirac 方程与原系中的原始方程具有相同的形式，则 Dirac 方程是协变的。也就是说，如果

$$\left(i\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu} - m\right)_{\alpha\beta}\Psi_\beta(x) = 0 \qquad \text{则} \qquad \left(i\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x'^\mu} - m\right)_{\alpha\beta}\Psi'_\beta(x') = 0 \tag{104}$$

注意两个重要事实：(1) 在 Lorentz 变换的作用下，场 Ψ 和坐标 x 都会发生变化；(2) 在 Lorentz 变换的作用下，gamma 矩阵和质量 m 不会发生变化。因此，gamma 矩阵与参照系的选择无关。不过，它们确实取决于自旋空间基的选择。

表示矩阵 $S(\Lambda)$ 应具有哪些性质？先观察一下，如果 $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$，那么

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu} \equiv \left(\Lambda^{-1}\right)^\nu_\mu\frac{\partial}{\partial x^\nu} \tag{105}$$

因此，$\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ 是一个协变矢量。将这一变换定律代回 Dirac 方程可以发现

$$i\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x'^\mu}\Psi'(x') = i\gamma^\mu\left(\Lambda^{-1}\right)^\nu{}_\mu\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(S(\Lambda)\Psi(x)\right) \tag{106}$$

因此，现在的 Dirac 方程为

$$i\gamma^\mu\left(\Lambda^{-1}\right)_\mu{}^\nu S(\Lambda)\frac{\partial\Psi}{\partial x^\nu} - mS(\Lambda)\Psi = 0 \tag{107}$$

或者等价地，

$$S^{-1}(\Lambda)\,i\gamma^\mu\left(\Lambda^{-1}\right)_\mu{}^\nu S(\Lambda)\frac{\partial\Psi}{\partial x^\nu} - m\Psi = 0 \tag{108}$$

因此，只要 $S(\Lambda)$ 满足以下条件，协变性就是成立的：

$$S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda)\left(\Lambda^{-1}\right)_\mu{}^\nu = \gamma^\nu \tag{109}$$

既然 Lorentz 变换集构成了一个群，那么表示矩阵 $S(\Lambda)$ 也应该构成一个群。特别是，性质

$$S^{-1}(\Lambda) = S\left(\Lambda^{-1}\right) \tag{110}$$

成立。回想到相对论间隔 $x^2 = x_\mu x^\mu$ 的不变性意味着 Λ 必须遵守

$$\Lambda^\nu{}_\mu\Lambda_\nu{}^\lambda = g_\mu{}^\lambda \equiv \delta_\mu{}^\lambda \tag{111}$$

因此，

$$\Lambda_\mu{}^\nu = \left(\Lambda^{-1}\right)_\nu{}^\mu \tag{112}$$

所以可以将式 (109) 重写为

$$S(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda)^{-1} = \left(\Lambda^{-1}\right)^\mu{}_\nu\gamma^\nu \tag{113}$$

式 (113) 表明，Lorentz 变换在 gamma 矩阵上引入了相似变换，而 gamma 矩阵等价于 Lorentz 变换（的逆变换）。从这个等式可以看出，对于 Lorentz boost 的情况，式 (113) 表明矩阵 $S(\Lambda)$ 是 hermitian 的。相反，对于围绕固定原点旋转的 $SO(3)$ 子群，矩阵 $S(\Lambda)$ 是幺正的。矩阵 $S(\Lambda)$ 是 Lorentz 群 $SO(3,1)$ 的一个表示，而 Lorentz 群 $SO(3,1)$ 是一个非紧凑 Lie 群，因此就具有这些不同的性质。

现在找到无穷小 Lorentz 变换的 $S(\Lambda)$ 的形式。由于恒等变换是 $\Lambda^{\mu}_{\nu}=g^{\mu}_{\nu}$，无限接近恒等变换的 Lorentz 变换应具有如下形式

$$\Lambda^{\mu}_{\nu}=g^{\mu}_{\nu}+\omega^{\mu}_{\nu} \qquad \text{且} \qquad \left(\Lambda^{-1}\right)^{\mu}_{\nu}=g^{\mu}_{\nu}-\omega^{\mu}_{\nu} \tag{114}$$

其中，$\omega^{\mu\nu}$ 是无穷小的，在其时空指标上是反对称的：

$$\omega^{\mu\nu}=-\omega^{\nu\mu} \tag{115}$$

用一个 4×4 矩阵 $\sigma_{\mu\nu}$ 对 $S(\Lambda)$ 进行参数化，该矩阵的指标也是反对称的（即 $\sigma_{\mu\nu}=-\sigma_{\nu\mu}$）。那么可以写出

$$\begin{aligned} S(\Lambda)&=I-\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}+\cdots \\ S^{-1}(\Lambda)&=I+\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}+\cdots \end{aligned} \tag{116}$$

其中 I 代表 4×4 单位矩阵。将其代入式 (113)，可得

$$\left(I-\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}+\cdots\right)\gamma^{\lambda}\left(I+\frac{i}{4}\sigma_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta}+\cdots\right)=\gamma^{\lambda}-\omega^{\lambda}_{\nu}\gamma^{\nu}+\cdots \tag{117}$$

收集所有与 ω 成线性关系的项，我们得到

$$\frac{i}{4}\left[\gamma^{\lambda},\sigma_{\mu\nu}\right]\omega^{\mu\nu}=\omega^{\lambda}_{\nu}\gamma^{\nu} \tag{118}$$

或者等价地，矩阵 $\sigma_{\mu\nu}$ 必须服从

$$\left[\gamma^{\mu},\sigma_{\nu\lambda}\right]=2i\left(g^{\mu}_{\nu}\gamma_{\lambda}-g^{\mu}_{\lambda}\gamma_{\nu}\right) \tag{119}$$

这个矩阵方程有解为

$$\sigma_{\mu\nu}=\frac{i}{2}\left[\gamma_{\mu},\gamma_{\nu}\right] \tag{120}$$

在有限 Lorentz 变换 $x'=\Lambda x$ 下，4-旋量变换为

$$\Psi'(x')=S(\Lambda)\Psi \tag{121}$$

其中

$$S(\Lambda)=\exp\left(-\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}\right) \tag{122}$$

矩阵 $\sigma_{\mu\nu}$ 是旋量表示中 Lorentz 变换群的生成元。从这个解法中可以看到空间分量 σ_{jk} 是 hermitian 矩阵，而时空分量 σ_{0j} 是反 hermitian 矩阵。这一特征告诉我们，Lorentz 群

并不是一个紧凑的幺正群，因为在这种情况下，它的所有生成元都是 hermitian 矩阵。相反，Lorentz 群与非紧凑群 $SO(3,1)$ 同构。因此，表示矩阵 $S(\Lambda)$ 只有在固定原点的空间旋转下才是幺正的。

线性算符 $S(\Lambda)$ 根据变换后的系的坐标给出了变换后的系中的场。然而，我们还想知道补偿坐标变换效应的变换 $U(\Lambda)$。换句话说，我们要找一个矩阵 $U(\Lambda)$，使得

$$\Psi'(x) = U(\Lambda)\Psi(x) = S(\Lambda)\Psi\left(\Lambda^{-1}x\right) \tag{123}$$

对于无穷小 Lorentz 变换，我们要找一个矩阵 $U(\Lambda)$，其形式为

$$U(\Lambda) = I - \frac{i}{2}J_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} + \cdots \tag{124}$$

并且我们希望找到 $J_{\mu\nu}$ 的表达式。我们发现

$$\begin{aligned}\left(I - \frac{i}{2}J_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} + \cdots\right)\Psi &= \left(I - \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} + \cdots\right)\Psi\left(x^\rho - \omega^\rho_\nu x^\nu + \cdots\right) \\ &\cong \left(I - \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} + \cdots\right)\left(\Psi - \partial_\rho\Psi\omega^\rho_\nu x^\nu + \cdots\right)\end{aligned} \tag{125}$$

因此

$$\Psi'(x) \cong \left(I - \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} + x_\mu\omega^{\mu\nu}\partial_\nu + \cdots\right)\Psi(x) \tag{126}$$

从这个表达式可以看出，$J_{\mu\nu}$ 由算符

$$J_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu} + i\left(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu\right) \tag{127}$$

给出。注意第二项是轨道角动量算符。第一项则解释为自旋。

事实上，考虑纯的空间旋转，其无穷小生成元就是 $J_{\mu\nu}$ 的空间分量，即

$$J_{jk} = i\left(x_j\partial_k - x_k\partial_j\right) + \frac{1}{2}\sigma_{jk} \tag{128}$$

还可以将三分量矢量 J_ℓ 定义为 J_{jk} 的三维对偶：

$$J_{jk} = \epsilon_{jkl}J_\ell \tag{129}$$

其中 ϵ^{ijk} 是三阶 Levi-Civita 张量：

$$\epsilon^{ijk} = \begin{cases} 1 & (ijk)\text{ 是 }(123)\text{ 的偶排列} \\ -1 & (ijk)\text{ 是 }(123)\text{ 的奇排列} \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \tag{130}$$

因此可以得到（还原因子 $\hbar$ 之后）：

$$\begin{aligned} J_\ell &= \frac{i\hbar}{2}\epsilon_{\ell jk}\left(x_j\partial_k - x_k\partial_j\right) + \frac{\hbar}{4}\epsilon_{\ell jk}\sigma_{jk} \\ &= i\hbar\epsilon_{\ell jk}x_j\partial_k + \frac{\hbar}{2}\left(\frac{1}{2}\epsilon_{\ell jk}\sigma_{jk}\right) \\ J_\ell &\equiv \left(\mathbf{x}\times\hat{\mathbf{p}}\right)_\ell + \frac{\hbar}{2}\sigma_\ell \end{aligned} \tag{131}$$

第一项显然是轨道角动量，第二项可视为自旋。有了这个定义，就可以直接检验出作为 Dirac 方程解的旋量 (ϕ, χ) 带有自旋 1/2。

5.4 Dirac 理论中场双线性型的变换特性

现在考虑 Dirac 理论的几个物理观测量在 Lorentz 变换下的变换特性。设 Λ 为一般 Lorentz 变换，$S(\Lambda)$ 为 Dirac 旋量 $\Psi_a(x)$ $(a = 1, \cdots, 4)$ 的诱导变换：

$$\Psi'_a(x') = S(\Lambda)_{ab} \Psi_b(x) \tag{132}$$

利用诱导 Lorentz 变换 $S(\Lambda)$ 和 Dirac gamma 矩阵的性质，可以直接验证 Dirac 双线性型服从以下变换定律。

标量：

$$\bar{\Psi}'(x') \Psi'(x') = \bar{\Psi}(x) \Psi(x) \tag{133}$$

按标量变换。

赝标量：定义 Dirac 矩阵 $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$。则双线性型

$$\bar{\Psi}'(x') \gamma_5 \Psi'(x') = \det \Lambda \bar{\Psi}(x) \gamma_5 \Psi(x) \tag{134}$$

按赝标量变换。

矢量：类似地，

$$\bar{\Psi}'(x') \gamma^\mu \Psi'(x') = \Lambda^\mu_\nu \bar{\Psi}(x) \gamma^\nu \Psi(x) \tag{135}$$

按矢量变换。

赝矢量：

$$\bar{\Psi}'(x') \gamma_5 \gamma^\mu \Psi'(x') = \det \Lambda \Lambda^\mu_\nu \bar{\Psi}(x) \gamma_5 \gamma^\nu \Psi(x) \tag{136}$$

按赝矢量变换。

张量：最后

$$\bar{\Psi}'(x') \sigma^{\mu\nu} \Psi'(x') = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta \bar{\Psi}(x) \sigma^{\alpha\beta} \Psi(x) \tag{137}$$

按张量变换。

在上述方程中，Λ^μ_ν 表示 Lorentz 变换，$\det \Lambda$ 是其行列式。我们还使用了

$$S^{-1}(\Lambda) \gamma_5 S(\Lambda) = \det \Lambda \gamma_5 \tag{138}$$

另外注意，Dirac 代数为 4×4 矩阵空间提供了一个自然的基，将其表示为

$$\Gamma^S \equiv I \qquad \Gamma^V_\mu \equiv \gamma_\mu \qquad \Gamma^T_{\mu\nu} \equiv \sigma_{\mu\nu} \qquad \Gamma^A_\mu \equiv \gamma_5\gamma_\mu \qquad \Gamma^P = \gamma_5 \tag{139}$$

其中，S、V、T、A 和 P 分别代表标量、矢量、张量、轴矢量（或赝矢量）和奇偶性。注意以下由 Dirac gamma 矩阵的乘积服从的迹恒等式，以备参考：

$$\mathrm{tr}I = 4 \qquad \mathrm{tr}\gamma_\mu = \mathrm{tr}\gamma_5 = 0 \qquad \mathrm{tr}\gamma_\mu\gamma_\nu = 4g_{\mu\nu} \tag{140}$$

另外，如果用 a_μ 和 b_μ 表示两个任意的 4-矢量，那么

$$\not{a}\not{b} = a_\mu b^\mu - i\sigma_{\mu\nu}a^\mu b^\nu \text{ 且} \mathrm{tr}\left(\not{a}\not{b}\right) = 4a\cdot b \tag{141}$$

5.5 Dirac Lagrangian

现在为 Dirac 理论寻找一个 Lagrangian 密度 $\mathcal{L}$。它应该是旋量场 Ψ 的局域可微 Lorentz 不变泛函。由于 Dirac 方程在导数上是一阶的，而且是 Lorentz 协变的，因此 Lagrangian 应该是 Lorentz 不变的，在导数上也是一阶的。一个简单的选择是

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}\left(i\not{\partial} - m\right)\Psi \equiv \frac{1}{2}\bar{\Psi}i\overleftrightarrow{\not{\partial}}\Psi - m\bar{\Psi}\Psi \tag{142}$$

其中 $\bar{\Psi}\overleftrightarrow{\not{\partial}}\Psi \equiv \bar{\Psi}\left(\not{\partial}\Psi\right) - \left(\partial_\mu\bar{\Psi}\right)\gamma^\mu\Psi$。这一选择满足了所有要求。

运动方程是以通常的方式导出的，即要求作用量 $S = \int d^4x\mathcal{L}$ 是平稳的：

$$\delta S = 0 = \int d^4x\left[\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Psi_\alpha}\delta\Psi_\alpha + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\Psi_\alpha}\delta\partial_\mu\Psi_\alpha + \left(\Psi\leftrightarrow\bar{\Psi}\right)\right] \tag{143}$$

运动方程为

$$\begin{aligned}\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Psi_\alpha} - \partial_\mu\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\Psi_\alpha} &= 0\\ \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\bar{\Psi}_\alpha} - \partial_\mu\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\bar{\Psi}_\alpha} &= 0\end{aligned} \tag{144}$$

通过直接代入发现

$$\left(i\not{\partial} - m\right)\Psi = 0 \qquad \text{和} \qquad \bar{\Psi}\left(i\overleftarrow{\not{\partial}} + m\right) = 0 \tag{145}$$

这里 $\overleftarrow{\not{\partial}}$ 表示导数作用于左侧。

最后，还可以写下由式 (142) 的 Lagrangian 得出的 Hamiltonian 密度。像往常一样需要确定与场 Ψ 共轭的正则动量：

$$\Pi(x) = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_0\Psi(x)} = i\bar{\Psi}(x)\gamma^0 \equiv i\Psi^\dagger(x) \tag{146}$$

因此 Hamiltonian 密度为

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \Pi(x)\partial_0\Psi(x) - \mathcal{L} = i\bar{\Psi}\gamma^0\partial_0\Psi - \mathcal{L}\\ &= \bar{\Psi}i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla\Psi + m\bar{\Psi}\Psi\\ &= \Psi^\dagger\left(i\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla + m\beta\right)\Psi\end{aligned} \tag{147}$$

因此发现式 (71) 中的“单粒子”Dirac Hamiltonian H_{Dirac} 也自然出现在场论中。

由于式 (147) 的 Hamiltonian 是一阶导数，与 Klein-Gordon 的相对应不同，它并不明显为正。因此，这个理论存在稳定性问题。将这一理论合适地量子化为 fermion 的 QFT 可以解决这一问题。换句话说，有必要施加 Pauli 原理使该理论能够描述一个稳定的系统，其能谱自下而上是有界的。这样我们就会发现场的自旋与统计量之间存在着天然的联系。这种联系实际上是 QFT 的公理，被称为自旋-统计定理。

6 作为场论的经典电磁学

现在讨论一组源产生的电磁场问题。令 $\rho(x)$ 和 $\mathbf{j}(x)$ 分别表示时空中 x 点的电荷密度和电流密度。电荷守恒要求必须遵守连续性方程：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \tag{148}$$

给定初始条件，即过去某个 t_0 时刻的电场 $\mathbf{E}(x)$ 和磁场 $\mathbf{B}(x)$ 的值，时间演化受 Maxwell 方程组支配：

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{149}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{j} \qquad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \tag{150}$$

可以重新表述经典电动力学，使得：(1) 相对论协变性是显而易见的；(2) Maxwell 方程组遵循最小作用量原理。要理解上述内容，一个简便的方法是定义电磁场张量 $F^{\mu\nu}$，它是（逆变的）反对称实张量，其分量为

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} \tag{151}$$

或等价地，

$$\begin{aligned} F^{0i} &= -F^{i0} = -E^i \\ F^{ij} &= -F^{ji} = \epsilon^{ijk} B^k \end{aligned} \tag{152}$$

对偶张量 $\tilde{F}_{\mu\nu}$ 的定义如下：

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = -\tilde{F}^{\nu\mu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \tag{153}$$

其中，$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ 是四阶 Levi-Civita 张量，其定义与式 (130) 中的三阶 Levi-Civita 张量类似。特别地，

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B^1 & -B^2 & -B^3 \\ B^1 & 0 & E^3 & -E^2 \\ B^2 & -E^3 & 0 & E^2 \\ B^3 & E^2 & -E^2 & 0 \end{pmatrix} \tag{154}$$

有了这些符号就可以用更紧凑、更明显的协变形式重写 Maxwell 方程组即式 (150) 的左列，

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \tag{155}$$

我们把它解释为电磁场的运动方程。Maxwell 方程组即 (150) 的右列变成了约束条件

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \tag{156}$$

这就是的 Bianchi 恒等式。于是 Maxwell 方程组的一致性要求满足连续性方程

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \tag{157}$$

通过观察发现在交换电场和磁场时，场张量 $F^{\mu\nu}$ 和对偶场张量 $\tilde{F}^{\mu\nu}$ 会相互映射。如果除了电荷流 j^μ 之外，Bianchi 恒等式（式 (157)）还包括（磁单极子的）磁荷流，那么这种电磁对偶性就是电动力学的精确性质。

此时可以方便地引入矢势 A^μ，其逆变分量为

$$A^\mu(x) = \left(\frac{A^0}{c}, \mathbf{A}\right) \tag{158}$$

电流 4-矢量 $j^\mu(x)$ 为

$$j^\mu(x) = (\rho c, \mathbf{j}) \equiv \left(j^0, \mathbf{j}\right) \tag{159}$$

电场强度 $\mathbf{E}$ 和磁场 $\mathbf{B}$ 的定义是

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\nabla A^0 - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \qquad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{160}$$

用更简洁的相对论协变符号写作

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \tag{161}$$

就矢势 A^μ 而言，Maxwell 方程组在（局域）规范变换下保持不变：

$$A^\mu(x) \mapsto A^\mu(x) + \partial^\mu \Phi(x) \tag{162}$$

其中 $\Phi(x)$ 是时空坐标 x^μ 的任意光滑函数。不难发现，在式 (162) 的变换下，场强保持不变（即 $F^{\mu\nu} \mapsto F^{\mu\nu}$）。这一特性被称为规范不变性，在现代物理学中起着基础性作用。

将磁场 $\mathbf{B}$ 和电场 $\mathbf{E}$ 的定义以 4-矢量 A^μ 的形式直接代入 Maxwell 方程组，就得到了波动方程。事实上，运动方程

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \tag{163}$$

可以得出矢势方程：

$$\partial^2 A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = j^\nu \tag{164}$$

这就是波动方程。

现在可以利用规范不变性进一步限制尚未完全确定的矢势 A^μ。这些限制被称为固定规范的过程。选择

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \tag{165}$$

被称为 Lorentz 规范，可以得到更简单的标准波动方程形式：

$$\partial^2 A^\mu = j^\mu \tag{166}$$

注意 Lorentz 规范保留了 Lorentz 协变性。

另一种流行的选择是辐射（或 Coulomb）规范：

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \tag{167}$$

得出（单位为 $c = 1$）

$$\partial^2 A^\nu - \partial^\nu \left(\partial_0 A^0\right) = j^\nu \tag{168}$$

这不是 Lorentz 协变量。在没有外部源的情况下，$j^\nu = 0$，可以进一步施加 $A^0 = 0$ 的限制。这一选择减少了三个方程，其中 $\mathbf{A}$ 的每个空间分量都有一个方程，它们满足

$$\partial^2 \mathbf{A} = 0 \qquad \text{只要} \qquad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \tag{169}$$

解是平面波，其形式为

$$\mathbf{A}\left(x\right) = \mathbf{A} e^{i\left(p_0 x_0 - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x}\right)} \tag{170}$$

只有当 $p_0^2 - \mathbf{p}^2 = 0$ 和 $\mathbf{p}\cdot\mathbf{A} = 0$ 时才一致。由于最后一个原因，这种选择也被称为横向规范。

也可以将电磁场视为一个动力学系统，并为其构建一个 Lagrangian 图景。由于 Maxwell 方程组是局域的、规范不变的和 Lorentz 协变的，我们应该要求 Lagrangian 密度也是局域的、规范不变的和 Lorentz 不变的。由于就矢势 A_μ 而言，Maxwell 方程组在导数上是二阶的，因此我们寻求的局域 Lagrangian 密度在矢势的导数上也是二阶的。满足所有要求的一个简单选择是

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu \tag{171}$$

这个 Lagrangian 密度显然是 Lorentz 不变的。当且仅当 j_μ 是一个守恒流（即 $\partial_\mu j^\mu = 0$）时，才会满足规范不变性，因为在规范变换 $A_\mu \mapsto A_\mu + \partial_\mu \Phi\left(x\right)$ 下，场强不会改变。但是，源项会发生如下变化：

$$\begin{aligned}\int d^4x j_\mu A^\mu \mapsto & \int d^4x \left[j_\mu A^\mu + j_\mu \partial^\mu \Phi\right] \\ & = \int d^4x j_\mu A^\mu + \int d^4x \partial^\mu \left(j_\mu \Phi\right) - \int d^4x \partial^\mu j_\mu \Phi\end{aligned} \tag{172}$$

如果源在无穷远处消失 ($\lim_{|x|\to\infty} j_\mu = 0$)，那么表面项就可以省略。因此，当且仅当电流 j^μ 局域守恒时，作用量 $S = \int d^4x\mathcal{L}$ 才是规范不变的，

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \tag{173}$$

即连续性方程。

现在可以通过要求作用量 S 平稳来推导运动方程：

$$\delta S = \int d^4x \left[\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta A^\mu}\delta A^\mu + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial^\nu A^\mu}\delta\partial^\nu A^\mu\right] = 0 \tag{174}$$

与之前的方法一样，进行分部积分，得到

$$\delta S = \int d^4x\partial^\nu\left[\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial^\nu A^\mu}\delta A^\mu\right] + \int d^4x\delta A^\mu\left[\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta A^\mu} - \partial^\nu\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial^\nu A^\mu}\right)\right] \tag{175}$$

要求在表面变分为零 ($\delta A^\mu = 0$)，得到

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta A^\mu} = \partial^\nu\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial^\nu A^\mu}\right) \tag{176}$$

显然有

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta A^\mu} = -j_\mu \qquad \text{和} \qquad \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial^\nu A^\mu} = F^{\mu\nu} \tag{177}$$

于是得到

$$j^\mu = -\partial_\nu F^{\mu\nu} \tag{178}$$

或等价地

$$j^\nu = \partial_\mu F^{\mu\nu} \tag{179}$$

因此，最小作用量原理暗示了 Maxwel 方程组。

7 作为场论的 Landau 相变理论

现在来谈磁体的统计力学问题。具体来说，考虑最简单的铁磁体模型：经典 Ising 模型。在这个模型中，我们考虑的是某个晶格（例如立方晶格）上的原子阵列。假设每个位点都有一个净自旋磁矩 $\mathbf{S}(i)$。根据基本量子力学，我们知道自旋之间最简单的相互作用是 Heisenberg 交换 Hamiltonian，

$$H = -\sum_{\langle i,j\rangle} J_{ij}\mathbf{S}(i)\cdot\mathbf{S}(j) \tag{180}$$

其中 $\langle i,j\rangle$ 是晶格上最近邻位点。在有磁各向异性的许多情况下，只有自旋算符的 z 分量起作用。Hamiltonian 简化为 Ising 模型的：

$$H_I = -J\sum_{\langle ij\rangle}\sigma(i)\sigma(j) \equiv E[\sigma] \tag{181}$$

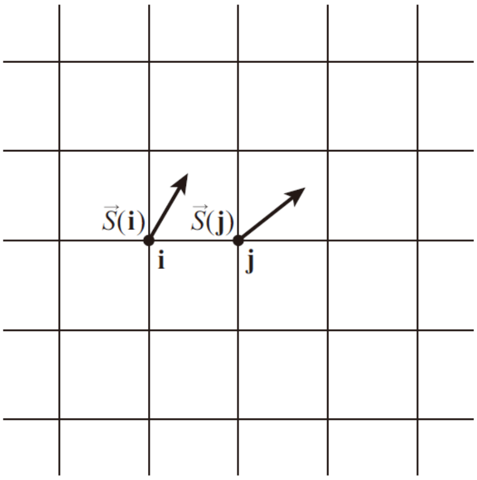

图 3: 晶格上的自旋。

其中，$[\sigma]$ 表示自旋构型，$\sigma(i)$ 是自旋在每个位置 i 的 z 投影。

系统的平衡特性由配分函数 Z 决定，它是每个态的 Boltzmann 权重在所有自旋构型 $[\sigma]$ 上的总和，

$$Z = \sum_{\{\sigma\}} \exp\left(-\frac{E[\sigma]}{T}\right) \tag{182}$$

其中，T 是温度，$\{\sigma\}$ 是所有自旋构型的集合。

20 世纪 50 年代，Landau 提出了研究这类问题的图景，一般来说，这类问题都非常困难。Landau 首先提出不研究微观自旋，而是研究一组粗粒构型。利用 Kadanoff 和 Wilson 提出的论点的现代版本，一种方法是将线性尺寸为 L 的大型系统划分为线性尺寸为 ℓ 的更小区域或区块，使得 $a_0 \ll \ell \ll L$，其中 a_0 是晶格间距。每个区域都将以一个位点为中心，例如 $\mathbf{x}$。用 $\mathcal{A}(\mathbf{x})$ 来表示这样的区域。现在的想法是进行求和（即配分函数 Z），同时将每个区域 $\mathcal{A}(\mathbf{x})$ 的总磁化值固定为

$$M(\mathbf{x}) = \frac{1}{N[\mathcal{A}]} \sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{A}(\mathbf{x})} \sigma(\mathbf{y}) \tag{183}$$

其中 $N[\mathcal{A}]$ 是 $\mathcal{A}(\mathbf{x})$ 中的位点数。现在受限配分函数是粗粒局域磁化 $M(\mathbf{x})$ 的泛函：

$$Z[M] = \sum_{\{\sigma\}} \exp\left\{-\frac{E[\sigma]}{T}\right\} \prod_{\mathbf{x}} \delta\left(M(\mathbf{x}) - \frac{1}{N(\mathcal{A})} \sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{A}(\mathbf{x})} \sigma(\mathbf{y})\right) \tag{184}$$

变量 $M(\mathbf{x})$ 的特性是，当 $N(\mathcal{A})$ 非常大时，它们实际上是实数取值。此外，粗粒构型 $\{M(\mathbf{x})\}$ 比微观构型 $\{\sigma\}$ 更平滑。

在非常高的温度下，平均磁化 $\langle M\rangle = 0$，系统处于顺磁相。相反，在低温下，平均磁化可能不为零，系统可能处于铁磁相。因此，在高温下，配分函数 Z 主要由 $\langle M\rangle = 0$ 的构型组成，而在极低温下，最常见的构型是 $\langle M\rangle \neq 0$。Landau 接着写下了以对平滑连

续构型 $M(\mathbf{x})$ 求和的配分函数的近似形式，形式上可以表示为

$$Z \approx \int \mathcal{D}M(\mathbf{x}) \exp\left(-\frac{E[M(\mathbf{x}), T]}{T}\right) \tag{185}$$

其中，$\mathcal{D}M(\mathbf{x})$ 是一个积分测度，表示“所有构型的总和”。

假设对于式 (185) 所示总和（积分！）中的主要构型，局域平均值 $M(\mathbf{x})$ 是 $\mathbf{x}$ 的光滑函数，并且很小。那么能量泛函 $E[M]$ 可以写成 $M(\mathbf{x})$ 及其空间导数的幂级数展开。根据这些假设，D 维磁体的自由能可以用 Ginzburg-Landau 形式来近似：

$$E(M) = \int d^D x \left(\frac{1}{2}K(T)|\nabla M(\mathbf{x})|^2 + \frac{1}{2}a(T)M^2(\mathbf{x}) + \frac{1}{4!}b(T)M^4(\mathbf{x}) + \cdots\right) \tag{186}$$

Ginzburg 和 Landau 提出了一个额外的（也是苛刻的）假设，即存在一个支配整个配分函数的单一构型 $M(\mathbf{x})$。在这个可视为平均场近似的假设下，自由能 $F = -T\ln Z$ 的形式与式 (186) 相同。

热力学稳定性要求二次项的刚度 $K(T)$ 和系数 $b(T)$ 必须为正。这些参数的一个简单选择是

$$K(T) \simeq K_0 \qquad b(T) \simeq b_0 \qquad a(T) \simeq \bar{a}(T - T_c) \tag{187}$$

其中，T_c 是临界温度的近似值。

自由能 $F(M)$ 定义了经典或 Euclidean 场论。事实上，将 $M(x)$ 以下列形式重缩

$$\Phi(x) = \sqrt{K}M(x) \tag{188}$$

可以把自由能写成

$$F(\Phi) = \int d^d x \left\{\frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + U(\Phi)\right\} \tag{189}$$

其中势 $U(\Phi)$ 为

$$U(\Phi) = \frac{\bar{m}^2}{2}\Phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\Phi^4 + \cdots \tag{190}$$

其中 $\bar{m}^2 = \frac{a(T)}{K}$，$\lambda = \frac{b}{K^2}$。除了没有涉及正则动量 $\Pi^2(x)$ 的项之外，$F(\Phi)$ 与 Minkowski 空间中标量场的 Hamiltonian 非常相似！这并非偶然，Ginzburg-Landau 理论与具有 Φ^4 势的标量场的 QFT 密切相关。

现在要问：是否有一种构型 $\Phi_c(\mathbf{x})$ 能对配分函数 Z 做出主要贡献？如果有，应该可以近似地得出

$$Z = \int \mathcal{D}\Phi \exp\{-F(\Phi)\} \approx \exp\{-F(\Phi_c)\}\{1 + \cdots\} \tag{191}$$

这种说法通常称为平均场近似。由于被积函数是指数函数，主要构型 Φ_c 必须是 F 在 Φ_c 处有（局域）最小值的构型。这与在 Minkowski 时空中解决经典场论的问题如出一辙。

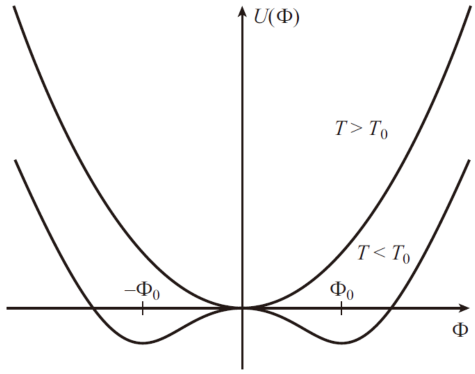

图 4: 序参量场 Φ 的 Landau 自由能：对于 $T > T_0$，自由能在 $\Phi = 0$ 处有唯一的最小值，而对于 $T < T_0$，在 $\Phi = \pm\Phi_0$ 处有两个最小值。

注意在推导 F 的过程中，所援引的论据与之前的基本相同：(1) 不变性和 (2) 局域性（可微性）。

Euler-Lagrange 方程可以用我们在标量场论中使用的相同论据推导出来。在本例中，它们变成

$$-\frac{\delta F}{\delta \Phi(\mathbf{x})} + \partial_j \left(\frac{\delta F}{\delta \partial_j \Phi(\mathbf{x})} \right) = 0 \tag{192}$$

对于 Landau 理论，Euler-Lagrange 方程变成了 Ginzburg-Landau 方程：

$$0 = -\nabla^2 \Phi_c(\mathbf{x}) + \bar{m}^2 \Phi_c(\mathbf{x}) + \frac{\lambda}{3!} \Phi_c^3(\mathbf{x}) \tag{193}$$

能量最小的 $\Phi_c(\mathbf{x})$ 在空间上是均匀的，因此 $\partial_j \Phi_c = 0$。因此，Φ_c 是非常简单方程的解

$$\bar{m}^2 \Phi_c + \frac{\lambda}{3!} \Phi_c^3 = 0 \tag{194}$$

由于 λ 为正，而 $\bar{m}^2$ 可能有两种符号（取决于 $T > T_c$ 还是 $T < T_c$），因此必须分开探讨这两种情况。

对于 $T > T_c$，$\bar{m}^2$ 也是正值，唯一的实际解是 $\Phi_c = 0$。但是，当 $T < T_c$ 时，$\bar{m}^2$ 为负值，这时有两个新的解：

$$\Phi_c = \pm \sqrt{\frac{6\,|\bar{m}^2|}{\lambda}} \tag{195}$$

这些是能量最低的解，它们是简并的。它们都代表磁化（或铁磁）相。

现在要问，这个程序是否正确，或者说，什么时候才能指望这种近似方法奏效。这个问题的答案是相变理论的核心问题，相变理论描述了统计系统在连续（或二阶）相变附近的行为。事实证明，这个问题也与 QFT 的一个核心问题有关，即何时以及如何能够消除微扰理论的奇异行为，并在此过程中消除物理观测量对短距（或高能）截断的所有依赖。在 QFT 中，这一过程相当于连续极限的定义。对这些问题的回答推动了重正化群的发展，它同时解决了这两个问题。

8 场论和统计力学

现在讨论一种数学方法，使我们能够把 QFT 与经典统计力学联系起来。

回到 $D=d+1$ 维时空中实标量场 $\Phi(x)$ 的作用量：

$$S=\int d^D x\mathcal{L}(\Phi,\partial_\mu\Phi) \tag{196}$$

其中 $d^D x$ 为

$$d^D x\equiv dx_0 d^d x \tag{197}$$

正式进行 x_μ 的时间分量 x_0 从实时间到虚时间 x_D 的解析延拓：

$$x_0\mapsto -ix_D \tag{198}$$

有

$$\Phi(x_0,\mathbf{x})\mapsto\Phi(\mathbf{x},x_D)\equiv\Phi(x) \tag{199}$$

其中 $x=(\mathbf{x},x_D)$。在这种变换下，作用量（或者说 i 乘以作用量）变成了

$$iS\equiv i\int dx_0 d^d x\mathcal{L}(\Phi,\partial_0\Phi,\partial_j\Phi)\mapsto\int d^D x\mathcal{L}(\Phi,-i\partial_D\Phi,\partial_j\Phi) \tag{200}$$

如果 $\mathcal{L}$ 形为

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}(\partial_\mu\Phi)^2-V(\Phi)\equiv\frac{1}{2}(\partial_0\Phi)^2-\frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2-V(\Phi) \tag{201}$$

则解析延拓得到

$$\mathcal{L}(\Phi,-i\partial_D\Phi,\nabla\Phi)=-\frac{1}{2}(\partial_D\Phi)^2-\frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2-V(\Phi) \tag{202}$$

然后可以写出

$$iS(\Phi,\partial_\mu\Phi)\xrightarrow{x_0\to -ix_D}-\int d^D x\left[\frac{1}{2}(\partial_D\Phi)^2+\frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2+V(\Phi)\right] \tag{203}$$

这个表达式与经典场 Φ 在 $D=d+1$ 维空间中的势能 $E(\Phi)$ 的形式相同。然而，它也与相同维数的经典统计力学问题的能量相同。

在经典统计力学中，系统的平衡特性由配分函数决定。就相变的 Landau 理论而言，配分函数为

$$Z=\int\mathcal{D}\Phi e^{-E(\Phi)/T} \tag{204}$$

其中符号“$\int\mathcal{D}\Phi$”表示所有构型的求和。如果选择能量函数 $E(\Phi)$ 的表达式为

$$E(\Phi)=\int d^D x\left[\frac{1}{2}(\partial\Phi)^2+V(\Phi)\right] \tag{205}$$

其中

$$(\partial\Phi)^2 \equiv (\partial_D\Phi)^2 + (\nabla\Phi)^2 \tag{206}$$

可以看到配分函数 Z 形式上是

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\Phi e^{iS(\Phi,\partial_\mu\Phi)/\hbar} \tag{207}$$

的解析延拓，其中使用了 $\hbar$，它的单位是作用量（而不是温度）。

$\mathcal{Z}$ 的物理含义是什么？这个表达式表明，$\mathcal{Z}$ 的解释应该是所有用相位因子 $\exp\left\{\frac{i}{\hbar}S\left(\Phi,\partial_\mu\Phi\right)\right\}$ 加权的可能函数 $\Phi\left(\mathbf{x},t\right)$ 的总和（即场 Φ 的构型历史）。如果将 T 与普朗克常量 $\hbar$ 正式认为相同，那么 $\mathcal{Z}$ 就代表了场论的路径积分量子化！注意，半经典极限 $\hbar\to 0$ 在形式上等同于统计力学系统的低温极限。

刚才讨论的解析延拓过程称为 Wick 转动。它相当于从 $D=d+1$ 维的 Minkowski 空间到 D 维的 Euclidean 空间。这种解析延拓是一种非常强大的工具。当理论直接在 Minkowski 空间中定义时，会出现各种困难。问题主要在于存在不良定义的积分，通过将积分等值线从实轴（或频率轴）变形到虚轴（或频率轴），赋予其精确的含义。等值线的变形相当于在 Euclidean 空间而不是 Minkowski 空间对理论进行定义。其基本假设是可以顺利进行解析延拓。也就是说，假设这一过程的结果是唯一的，无论复平面上存在什么奇异点，都不会影响结果。必须强调的是，这一过程的成功并无保证。然而，在我们所知的几乎所有理论中，这一假设都是成立的。已知存在问题的唯一情况是量子引力理论。