量子场论 - 1
场论简介

Notes from E. Fradkin (2021)

1 物理中场的例子

1.1 电磁场

考虑一个线性尺寸为 $L \to \infty$ 的超大盒子，以及盒子内的电磁场。在空间 $\mathbf{x}$ 的每一点，我们可以定义一个矢量（也是时间的函数）$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ 和一个标量 $A_0(\mathbf{x}, t)$。这就是矢势和标势。物理上可观测到的电场 $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ 和磁场 $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ 以通常的方式定义：

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \qquad \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) - \nabla A_0(\mathbf{x}, t) \tag{1}$$

这个动力学系统的时间演化由局域 Lagrangian 密度决定。运动方程就是 Maxwell 方程组。定义 4-矢量场

$$A^\mu(x) = \left(A^0(x), \mathbf{A}(x)\right) \qquad A^0 \equiv A_0 \tag{2}$$

其中 $\mu = 0, 1, 2, 3$ 分别为时间和空间分量。这里 x 代表 4-矢量

$$x^\mu = (ct, \mathbf{x}) \tag{3}$$

对于 Minkowski 时空 $\mathcal{M}$ 中的每一点 x_μ，都关联了一个矢势 A_μ 的值。矢势是四个实数的有序集合，因此是 $\mathbb{R}^4$ 的元素。因此，场构型可以看作是 Minkowski 时空 $\mathcal{M}$ 到 $\mathbb{R}^4$ 的映射，

$$A^\mu : \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}^4 \tag{4}$$

由于时空是连续的，我们需要无数个 4-矢量来指定电磁场的构型，即使盒子是有限的（事实并非如此）。因此，我们拥有无限多个自由度，原因有二：时空是连续的，也是无限的。

1.2 固体的弹性场

考虑一个三维晶体。系统的构型可以用其原子相对于平衡态的位置集合（即在每个时间 t 的形变矢量 集合）来描述。晶格由三个整数的有序集合标记，等价于集合

$$\mathbb{Z}^3 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \tag{5}$$

而形变由三个实数集给出，是 $\mathbb{R}^3$ 的元素。因此，晶体构型是一个映射

$$\mathbf{d} : \mathbb{Z}^3 \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3 \tag{6}$$

在与晶格间距 a 相比较大，但与系统的线性尺寸 L 相比较小的长度尺度 ℓ 上，我们可以用连续描述来取代晶格 $\mathbb{Z}^3$，其中晶体被连续的三维欧几里得空间 $\mathbb{R}^3$ 所取代。因此，晶体的动力学需要一个四维时空 $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^4$。因此，构型空间成为连续映射的集合

$$\mathbf{d} : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^3 \tag{7}$$

在这种连续描述中，晶体的动力学是由位移矢量场 $\mathbf{d}\left(\mathbf{x},t\right)$ 及其时间导数，即速度 $\frac{\partial\mathbf{d}}{\partial t}\left(\mathbf{x},t\right)$ 来定义的，它们定义了系统的力学状态。这就是弹性理论的起点。位移场 $\mathbf{d}$ 是晶体的弹性场。

1.3 铁磁体的序参量场

现在来看铁磁体。这是一个物理系统，通常是固体，其中 $\frown$ 点附近存在局域平均磁化场 $\mathbf{M}\left(\mathbf{x}\right)$。局域磁化是 $\frown$ 附近每个原子的局域磁矩之和。在长于微观距离（原子间距 a）的尺度上，$\mathbf{M}\left(\mathbf{x}\right)$ 是一个连续的实矢量场。在某些情况下，局域磁矩的大小不会涨落，但其局域取向会涨落。因此，系统的局域状态由一个三分量单位矢量 $\ltimes$ 指定。由于单位向量集与球面 S^2 上的点一一对应，因此构型空间等价（同构）于 Euclidean 三维空间到 S^2 的映射集

$$\mathbf{n}:\mathbb{R}^3\mapsto S^2 \tag{8}$$

在有序状态下，各个磁矩会自发地沿着某个方向定向。因此，场 $\mathbf{n}$ 通常被称为序参量场。在相变理论中，序参量场代表物理系统的重要的自由度（即驱动相变的自由度）。

1.4 带电流体的流体力学

带电流体可以用流体力学来描述。在流体力学中，我们可以指定时空点 x^μ 处的电荷密度 $\rho\left(\frown,t\right)$ 和电流密度 $\gimel\left(\frown,t\right)$。电荷密度和电流密度可

$$j^\mu\left(x\right)=\left(c\rho\left(\mathbf{x},t\right),\mathbf{j}\left(\mathbf{x},t\right)\right) \tag{9}$$

其中，c 是经过适当选择的速度（一般不是光速！）。显然，构型空间是以下映射的集合

$$j^\mu:\mathbb{R}^4\mapsto\mathbb{R}^4 \tag{10}$$

一般来说，我们既对这些系统的动态演变感兴趣，也对它们的大尺度（热力学）特性感兴趣。因此，我们需要确定一个在某个时间 t_0 处于某种初始状态的系统如何在时间 T 之后演化到另一种状态。在经典力学中，任何物理系统的动力学都可以用 Lagrangian 来描述。Lagrangian 是场及其空间和时间导数的局域函数。这里的“局域”是指运动方程可以用偏微分方程来表示。换句话说，我们不允许“超距作用”，而只允许局域演化。同样，这些系统的热力学性质也受局域能量函数，即 Hamiltonian 的支配。动力学由 Lagrangian 决定，这意味着场本身被视为一个力学系统，经典力学的标准定律对其适用。在这里，流体的波动方程就是场的运动方程。这一观点也将告诉我们如何量子化场论。

2 为什么是量子场论？

从历史的角度来看，量子场论 (QFT) 是核物理和粒子物理领域研究的产物。特别是，Dirac 的电子和正电子理论可能是第一个 QFT。如今，QFT 作为一种图景和工具，被广泛应用于物理学的各个领域。引入 QFT 作为粒子物理学的总体框架，意味着粒子的概念必须被理解为场的激发。因此，正如 Einstein 1905 年关于光电效应的论文所预期的那样，光子成为电磁场的量子化激发，具有类似粒子的特性（如动量）。Dirac 的电子理论意味着，即使是这种“传统”粒子也应被理解为场的激发。

这些发展的主要动因是需要调和或统一量子力学与狭义相对论。此外，电子自旋和光子产生电子-正电子的实验发现表明，不仅 Schrödinger 方程不足以描述这些物理现象，而且粒子的概念本身也必须加以修正。

事实上，让我们考虑一下 Schrödinger 方程

$$H\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} \tag{11}$$

其中 H 是 Hamiltonian

$$H = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(\mathbf{x}) \tag{12}$$

而 $\hat{\mathbf{p}}$ 是用微分算子表示的动量

$$\hat{\mathbf{p}} = \frac{\hbar}{i}\nabla \tag{13}$$

其作用于波函数 $\Psi(\mathbf{x})$ 的 Hilbert 空间。

只要电势 $V(\frown)$ 不变，Schrödinger 方程在 Galilean 变换下是不变的，但在一般的 Lorentz 变换下则不然。因此，薛定谔方程所描述的量子力学不符合物理现象的描述必须对所有惯性系观测者完全一致的要求。此外，由于在非相对论的 Schrödinger 方程中，粒子的数量是严格守恒的，因此量子力学无法描述成对产生过程。

早在 20 世纪 20 年代末，就有人提出了两种看似相反的方法来解决这些问题。这两种方法实际上并不相互排斥。第一种方法是坚持“粒子”量子力学的基本结构，写出 Schrödinger 方程的相对论不变版本。由于在狭义相对论中，涉及质量为 m 的粒子的能量 E 的自然 Lorentz 标量是 $E^2-(\mathbf{p}^2c^2+m^2c^4)$，因此有人提出，“波函数”应该是该方程的解（能量的“平方”）。

$$\left[\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 - \left(\left(\frac{\hbar c}{i}\nabla\right)^2 + m^2c^4\right)\right]\Psi(\mathbf{x},t) = 0 \tag{14}$$

这就是 Klein-Gordon 方程。该方程在 Lorentz 变换下是不变的

$$x^{\mu} = \Lambda^{\mu,\nu}x'_{\nu}\ x^{\mu} = (x_0, \mathbf{x}) \tag{15}$$

前提是“波函数”$\Psi(\mathbf{x})$ 在 Lorentz 变换下也是标量（即不变）的

$$\Psi(x) = \Psi'(x') \tag{16}$$

然而，人们很快就发现，Klein-Gordon 方程与粒子解释并不兼容。此外，它也无法描述具有自旋的粒子。特别是 Klein-Gordon 方程的解具有（预期的）色散律

$$E^2 = \mathbf{p}^2c^2 + m^2c^4 \tag{17}$$

这意味着存在正负能量解

$$E = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2c^2 + m^2c^4} \tag{18}$$

从“粒子”的角度来看，负能量态是不可接受的，因为这意味着不存在基态。在 QFT 中，对这些解有一种自然而简单的解释，它们绝不会使系统变得不稳定。然而，在 20 世纪 30 年代初，负能量解的含义并不明确。

为了满足狭义相对论关于能量和动量必须同等对待的要求，并避免使用哈密顿 H 的平方来求解负能量，Dirac 提议寻找一个导数线性的方程。为了与狭义相对论兼容，该方程必须在 Lorentz 变换下具有协变性（即在所有参照系中具有相同的形式）。Dirac 提出的矩阵方程在导数上是线性的，“波函数”$\Psi(\mathbf{x})$ 的形式是一个四分量矢量，即 4-旋量 $\Psi_a(x)$ $(a = 1, \cdots, 4)$：

$$i\hbar\frac{\partial\Psi_a}{\partial t}(x) + \frac{\hbar c}{i}\sum_{j=1}^{3}\alpha_j^{ab}\partial_j\Psi_b(x) + mc^2\beta_{ab}\Psi_b(x) = 0 \tag{19}$$

其中 α_j 和 β 是四个 4×4 矩阵。为了使该方程具有协变性，4-旋量场必须在 Lorentz 变换下变换为旋量

$$\Psi_a'(\Lambda x) = S_{ab}(\Lambda)\Psi_b(x) \tag{20}$$

其中 $S(\Lambda)$ 是一个合适的矩阵。矩阵 α_j 和 β 的元素必须是独立于参考系的纯数。通过进一步要求该方程的迭代形式（即“平方”）分别满足每个分量的 Klein-Gordon 方程，Dirac 发现矩阵服从 (Clifford) 代数

$$\{\alpha_j, \alpha_k\} = 2\delta_{jk}\mathbf{1} \qquad \{\alpha_j, \beta\} = 0 \qquad \alpha_j^2 = \beta^2 = \mathbf{1} \tag{21}$$

其中 $\mathbf{1}$ 是 4×4 单位矩阵。很容易发现解具有能量特征值 $E = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2c^2 + m^2c^4}$。还可以证明解是自旋-1/2 的粒子和反粒子。

然而，Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程的粒子解释都存在问题。虽然自旋-1/2 现在以一种自然的方式出现了，但负能量状态的含义仍然不清楚。

解决所有这些难题的基本思路是，这些方程不应被视为 Schrödinger 方程对相对论粒子的概括，而应被视为场的运动方程，其激发就是粒子，就像光子是电磁场的激发一样。在这种情况下，粒子数是不守恒的，但电荷是守恒的。因此，光子与物质相互作用

可以产生电子-正电子对。这种过程并不违反电荷守恒，但粒子作为一个基本实体和具有独特物理特性的物体的概念却消失了。取而代之的是，场成为基本物体，粒子成为场的激发。

因此，量子力学的相对论推广就是 QFT。这一概念是 QFT 的起点。基本策略是寻求一种具有特定对称性的场论，其运动方程分别是 Maxwell 方程组、Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程。注意，如果粒子被视为场的激发，那么粒子的数量可以随心所欲。因此，QFT 的 Hilbert 空间具有任意（且不确定）的粒子数。这样的 Hilbert 空间被称为 Fock 空间。

因此，在 QFT 中，场不是任何事物的波函数。相反，场代表了无限多的自由度。事实上，QFT 中的波函数是场构型的函数，而场构型本身就指定了系统的状态。Fock 空间中的状态是通过指定粒子数及其量子数给出的，或者是通过某些正确选择的场的振幅（或构型）给出的。

不同的场在 Lorentz 变换下的变换不同，并构成 Lorentz 群的不同表示。因此，它们的激发是具有不同量子数的粒子，这些量子数标志着不同的表示。因此

1) Klein-Gordon 场 $\phi(x)$ 表示电荷中性的标量自旋-0 粒子。它的构型空间是 Minkowski 空间到实数 $\phi : \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}$，或到带电自旋-0 粒子的复数 $\phi : \mathcal{M} \mapsto \mathbb{C}$ 的映射集合。

2) Dirac 场代表带电的自旋-1/2 粒子。它是一个复数 4-旋量 $\Psi_\alpha(x)$ $(\alpha = 1, \cdots, 4)$，其构型空间是映射 $\Psi_\alpha : \mathcal{M} \mapsto \mathbb{C}^4$ 的集合，而对于中性自旋-1/2 粒子（如中微子）来说，它是实数。

3) 规范场 $A^\mu(x)$ 代表电磁场及其对胶子（等）的非 abelian 推广。

用相对论量子场描述相对论量子力学，基本上解决了其最初发展过程中产生的所有问题。此外，QFT 对量子电动力学 (QED) 所描述的量子化电磁场和带电粒子的行为给出了极其精确的预测。量子色动力学 (QCD) 以 Yang-Mills 规范场论、统一规范理论和大统一规范理论为基础，详细描述了强相互作用和弱相互作用。

然而，在取得成功的同时，QFT 也带来了一系列全新的物理问题。从根本上说，任何具有物理意义的 QFT 都必然是一种非线性理论，因为它必须描述相互作用。因此，即使在没有相互作用的情况下，激发态的量子数（即“粒子”谱）可能相当简单明了，但该理论的本征非线性实际上可能会解开这种结构的大部分。注意，QFT 的运动方程是非线性的，量子力学也是如此。然而，QFT 的波函数服从线性 Schrödinger 方程，就像非相对论量子力学中的波函数一样。

在 QFT 的早期，甚至在之后的一段时间里，人们都认为在所有情况下都可以使用微扰理论来确定实际频谱。但人们很快发现，虽然在一些具有重大物理意义的情况下，某种微扰理论可以准确地描述物理现象，但在更多的情况下却并非如此。人们很早就发

现，在微扰理论的每一阶，许多物理量都存在奇点贡献。这些奇点反映了无限自由度的存在，无论是在短距离上，因为时空是连续的（紫外 (UV) 域），还是在长距离上，因为时空（本质上）是无限的（红外 (IR) 域）。从定性上讲，微扰理论中的发散贡献是由于来自各种长度尺度（或波长）和能量尺度（或频率）的自由度对物理观测值的期望值做出了贡献。

从历史上看，处理这些问题的方法是正规化（即使发散贡献有限）和重整化（即定义一组有效参数，这些参数是探测系统的能量和/或动量尺度的函数）。正规化要求在某个高能尺度（紫外）截断积分。重整化被认为是从物理量的表达式中移除这些任意引入的截点的过程。只需定义有限数量的重正化参数（从实验中获取的实际输入参数）就能实现这种程序的理论被称为可重整化 QFT。QED 和 QCD 是可重正化 QFT 的最重要例子，当然还有许多其他例子。

重整化意味着物理观测量与 QFT Lagrangian 中的参数之间的联系非常不简单，理论谱可能与微扰理论的预言关系不大。QCD 就是这种情况，它的“基本场”涉及夸克和胶子，但实际物理谱只由束缚态组成，而束缚态的量子数既不是夸克的量子数，也不是胶子的量子数。重正化还意味着物理观测量的行为取决于理论被探测的尺度。此外，对这些理论的仔细研究还发现，它们可能存在于不同的阶段，在这些阶段中，观测量具有不同的行为，每个阶段都有特定的粒子谱。这样一来，要理解给定 QFT 所预言的内容，就变得与统计物理问题中的阶段研究非常相似了。在这幅图景中，QFT 的真空（或基态）对应于一个相，这与统计（或凝聚态）物理学中的相非常相似。

尽管重整化要求对粒子物理标准模型有效，但对引力却失效了。如何将引力与自然界的其他力统一起来，仍然是当代物理学的一大难题。弦理论是解决这一问题的主要方案。弦理论是目前已知的唯一能以一致的方式量子化引力的可行候选理论。然而，在弦理论中，QFT 被视为对自然的有效低能（流体力学）描述，QFT 的奇点被弦理论以自然的方式“调节”（但代价是局域性）。