分析力学 - 1
Lagrange 动力学

Notes from N. A. Lemos (2018)

1 Newton 力学原理

1.1 运动定律

第一定律：存在惯性参照系，相对于这些参照系，每个孤立的粒子都保持静止或直线匀速运动。

一个惯性参照系的存在意味着无穷多个惯性参照系的存在，所有惯性参照系都以恒定的速度在一条直线上相互运动。这一假设隐含了 Newton 的绝对时间概念，绝对时间本身从其自身性质来看与任何外部事物无关，在所有惯性参照系中都是一样的。如果一个粒子离所有物质物体足够远，就可以说它是“孤立的”。

第二定律：在任何惯性参照系中，质点的运动都受等式

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} \tag{1}$$

的支配，其中 $\mathbf{a}$ 是质点的加速度，m 是质点的质量，$\mathbf{F}$ 是作用在质点上的总力。

有一个正常数 m 与每个粒子相关，称为质量，它在所有惯性参照系中都是相同的。不同类型的力可以被识别，力的直观概念也可以被赋予可操作的定义。力被认为具有固有属性，可以独立于 Newton 第二定律来确定。

第三定律：每一个作用力都对应着一个相等且相反的反作用力，即如果 $\mathbf{F}_{ij}$ 是质点 j 对质点 i 施加的力，那么

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji} \tag{2}$$

这是弱形式的作用力与反作用力定律。强形式指出，除了相等和相反的作用力之外，作用力还沿着粒子之间的连线；两个粒子只能相互吸引或排斥。第三定律在一般情况下是无效的，因为运动的电荷违反了第三定律。这是由于电磁相互作用的传播速度有限，这就需要引入电磁场作为这种相互作用的媒介。

在有多个粒子的系统中，假定每个粒子受到的力可以分解为由系统外部施加的**外力**和由系统中其他粒子产生的**内力**。因此，根据第二定律，由 N 个粒子组成的系统中第 i 个粒子的运动方程为

$$\frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_i^{(e)} \tag{3}$$

其中

$$\mathbf{p}_i = m_i\mathbf{v}_i = m_i\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \tag{4}$$

表示第 i 个粒子的**线动量**或**动量**，m_i 为质量，$\mathbf{r}_i$ 为位置矢量，$\mathbf{v}_i$ 为速度，$\mathbf{F}_i^{(e)}$ 表示粒子受到的净外力。

1.2 守恒定律

将式 (3) 对所有粒子求和可得

$$\sum_i m_i \frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} = \sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} \mathbf{F}_{ij} + \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)} = \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)} \tag{5}$$

这是因为

$$\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} \mathbf{F}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} (\mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{ji}) = 0 \tag{6}$$

如下定义质心位置矢量

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i} \equiv \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{M} \tag{7}$$

式 (5) 的形式为

$$M \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)} \overset{\text{def}}{=\!=} \mathbf{F}^{(e)} \tag{8}$$

其中 $\mathbf{F}^{(e)}$ 是总外力。上式可以写成

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}^{(e)} \tag{9}$$

其中系统的总线动量定义为

$$\mathbf{P} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i = \sum_i m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = M \frac{d\mathbf{R}}{dt} \tag{10}$$

线动量守恒定律：如果总外力为零，则粒子系统的总线动量守恒。

系统相对于位置矢量为 $\mathbf{r}_Q$ 的点 Q 的**总角动量**为

$$\mathbf{L}_Q = \sum_i m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_Q) \times (\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_Q) \tag{11}$$

其中，$\mathbf{r}_i^{(Q)} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_Q$ 和 $\mathbf{v}_i^{(Q)} = \dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_Q$ 分别是第 i 个粒子相对于 Q 点的位置矢量和速度矢量。因此

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{L}_Q}{dt} &= \sum_i m_i \mathbf{v}_i^{(Q)} \times \mathbf{v}_i^{(Q)} + \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_Q) \times \dot{\mathbf{p}}_i - \sum_i m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_Q) \times \ddot{\mathbf{r}}_Q \\ &= \sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_Q) \times \mathbf{F}_{ij} + \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_Q) \times \mathbf{F}_i^{(e)} - M(\mathbf{R} - \mathbf{r}_Q) \times \ddot{\mathbf{r}}_Q\end{aligned} \tag{12}$$

其中使用了公式 (3)、(4) 和 (7)。可以写出

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_Q) \times \mathbf{F}_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} [(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_Q) \times \mathbf{F}_{ij} + (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_Q) \times \mathbf{F}_{ji}] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} [(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_Q) - (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_Q)] \times \mathbf{F}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ij}\end{aligned} \tag{13}$$

如果内力服从牛顿第三定律的强形式，则 $\mathbf{F}_{ij}$ 与第 j 个粒子指向第 i 个粒子的矢量 $\mathbf{r}_{ij} \equiv \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ 平行。因此，$\mathbf{r}_{ij} \times \mathbf{F}_{ij} = 0$，内力矩之和为零。因此，公式 (12) 可以改写为

$$\frac{d\mathbf{L}_Q}{dt} = \mathbf{N}_Q^{(e)} - M\left(\mathbf{R} - \mathbf{r}_Q\right) \times \ddot{\mathbf{r}}_Q \tag{14}$$

其中

$$\mathbf{N}_Q^{(e)} = \sum_i \left(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_Q\right) \times \mathbf{F}_i^{(e)} \tag{15}$$

是相对于 Q 点的**总外力矩**。如果 Q 静止或为质心，则 (14) 右侧的第二项消失，剩下

$$\frac{d\mathbf{L}_Q}{dt} = \mathbf{N}_Q^{(e)} \tag{16}$$

角动量守恒定律：如果总外力矩为零，粒子系统的总角动量守恒。

式 (10) 表示粒子系统的总线动量与粒子系统的全部质量都集中在质心时的计算结果吻合。对于总角动量还有一个额外的贡献。如果 $\mathbf{R}$ 是相对于惯性参考系原点 O 的质心位置矢量，$\mathbf{r}_i$ 是第 i 个粒子相对于质心的位置矢量，则

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}'_i + \mathbf{R} \qquad \mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i + \mathbf{V} \tag{17}$$

其中，$\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{R}}$ 是相对于 O 的质心速度，$\mathbf{v}'_i \equiv \dot{\mathbf{r}}'_i$ 是第 i 个粒子相对于质心的速度。相对于原点 O 的总角动量为

$$\mathbf{L} = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = \sum_i m_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}'_i + \left(\sum_i m_i \mathbf{r}'_i\right) \times \mathbf{V} + \mathbf{R} \times \frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i \mathbf{r}'_i\right) + M\mathbf{R} \times \mathbf{V} \tag{18}$$

这里用了 (17)。从 (17) 的第一个方程可以得出

$$\sum_i m_i \mathbf{r}'_i = \sum_i m_i \mathbf{r}_i - \sum_i m_i \mathbf{R} = M\mathbf{R} - M\mathbf{R} = 0 \tag{19}$$

因此相对于原点的总角动量可以分解为

$$\mathbf{L} = \mathbf{R} \times M\mathbf{V} + \sum_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{p}'_i \tag{20}$$

相对于原点的总角动量就是系统完全集中在质心的角动量加上与粒子围绕质心相对运动的角动量。

总动能的定义是

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2 \tag{21}$$

利用 (17) 可得

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i'^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i V^2 + \mathbf{V} \cdot \frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i \mathbf{r}'_i\right) \tag{22}$$

因此，由于 (19)，

$$T=\frac{M}{2}V^2+\frac{1}{2}\sum_i m_i v_i'^2 \tag{23}$$

当系统从构型 A 变为构型 B 时，所有力做的功定义为

$$W_{AB}=\sum_i\int_A^B\left(\mathbf{F}_i^{(e)}+\sum_{\substack{j\\j\neq i}}\mathbf{F}_{ij}\right)\cdot d\mathbf{r}_i=\sum_i\int_A^B\mathbf{F}_i^{(e)}\cdot d\mathbf{r}_i+\sum_{\substack{i,j\\i\neq j}}\int_A^B\mathbf{F}_{ij}\cdot d\mathbf{r}_i \tag{24}$$

另一方面利用运动方程 (3) 可以推导出

$$W_{AB}=\sum_i\int_A^B m_i\dot{\mathbf{v}}_i\cdot\mathbf{v}_i dt=\sum_i\int_A^B d\left(\frac{1}{2}m_i\nu_i^2\right)=\int_A^B dT \tag{25}$$

因此

$$W_{AB}=T_B-T_A \tag{26}$$

即所有力做的功等于动能的变化。

在大多数情况下，这些力是**保守**的，即来自标势。假设外力有一个势能函数 $V^{(e)}(\mathbf{r}_1,\cdots,\mathbf{r}_N)$，则

$$\mathbf{F}_i^{(e)}=-\nabla_i V^{(e)} \tag{27}$$

其中 $\nabla_i=\hat{\mathbf{x}}\partial/x_i+\hat{\mathbf{y}}\partial/\partial y_i+\hat{\mathbf{z}}\partial/\partial z_i$ 是关于变量 $\mathbf{r}_i$ 的 nabla 算子。这种情况下，

$$\sum_i\int_A^B\mathbf{F}_i^{(e)}\cdot d\mathbf{r}_i=-\int_A^B\sum_i\nabla_i V^{(e)}\cdot d\mathbf{r}_i=-\int_A^B dV^{(e)}=V_A^{(e)}-V_B^{(e)} \tag{28}$$

如果 $\mathbf{F}_{ij}$ 仅取决于相对位置 $\mathbf{r}_{ij}=\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j$，并可从势能函数 $V_{ij}(\mathbf{r}_{ij})$ $(V_{ij}=V_{ji})$ 中导出，那么

$$\mathbf{F}_{ij}=-\nabla_i V_{ij} \tag{29}$$

这种形式确保了弱形式作用—反作用定律的有效性。即

$$\mathbf{F}_{ij}=-\nabla_i V_{ij}=+\nabla_j V_{ij}=+\nabla_j V_{ji}=-\mathbf{F}_{ji} \tag{30}$$

此外，如果 V_{ij} 仅取决于粒子间的距离 $s_{ij}=|\mathbf{r}_{ij}|$（中心力），则可得

$$\mathbf{F}_{ij}=-\nabla_i V_{ij}(s_{ij})=-\frac{\mathbf{r}_{ij}}{s_{ij}}V_{ij}'(s_{ij}) \tag{31}$$

其中，V_{ij}' 是 V_{ij} 相对于其参数的导数。因此，$\mathbf{F}_{ij}$ 沿着粒子的连线指向，牛顿第三定律的强形式成立。

根据公式 (30) 可以写出

$$\sum_{\substack{i,j\\i\neq j}}\int_A^B \mathbf{F}_{ij}\cdot d\mathbf{r}_i=\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j\\i\neq j}}\int_A^B\left(\mathbf{F}_{ij}\cdot d\mathbf{r}_i+\mathbf{F}_{ji}\cdot d\mathbf{r}_j\right)=\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j\\i\neq j}}\int_A^B \mathbf{F}_{ij}\cdot d\left(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j\right)$$
$$=-\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j\\i\neq j}}\int_A^B \nabla_i V_{ij}\cdot d\mathbf{r}_{ij}=-\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j\\i\neq j}}\int_A^B \nabla_{ij} V_{ij}\cdot d\mathbf{r}_{ij}=-\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j\\i\neq j}} V_{ij}\Bigg|_A^B \tag{32}$$

其中，∇_{ij} 表示相对于向量 $\mathbf{r}_{ij}$ 的梯度，$\nabla_i V_{ij}=\nabla_{ij}V_{ij}$ 是明显的性质。最后，结合式 (24)、(26)、(28) 和 (32)，可以发现

$$(T+V)_A=(T+V)_B \tag{33}$$

其中

$$V=V^{(e)}+\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j\\i\neq j}}V_{ij} \tag{34}$$

能量守恒定律：如果所有的力都是保守的，那么粒子系统的总能量 $E=T+V$ 守恒。

2 约束

约束是对力学系统粒子可能位置或速度的限制，先验地限制了粒子的运动。约束是对系统施加的运动学性质的限制。因此，这种限制先于动力学，必须在确定系统的运动方程时加以考虑。由运动方程产生的动力学性质的限制并不是约束。

2.1 完整约束

如果 $\xi_1,\cdots,\xi_M$ 是用于描述力学系统**构型**的任意坐标，如果可以用以下形式的方程表示，则称该约束为**完整**的

$$f\left(\xi_1,\cdots,\xi_M,t\right)=0 \tag{35}$$

仅通过坐标之间的函数关系，可能还有显式的时间依赖关系。无法如此表示的约束条件被称为**非完整**的。

定义：完整系统是一个力学系统，其约束条件均形为式 (35)。

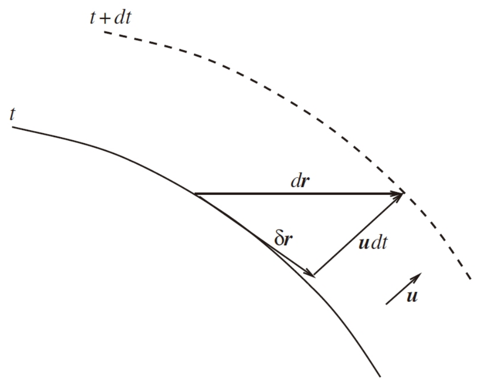

图 1: 限制在运动表面上的粒子的虚位移和实位移。

特别是在刚体动力学中，经常会出现一些约束条件，这些约束条件可以用涉及速度的方程来表示，即形式如下的微分方程

$$g\left(\xi_1,\cdots,\xi_M,\dot{\xi}_1,\cdots,\dot{\xi}_M,t\right)=0 \tag{36}$$

一般这类方程无法通过积分还原为 (35) 的形式，因此无法成为完整的。(36) 形式的不可积分约束限制了系统可能的位移，但并不对可能的构型施加任何限制，因此所有构型都是先验可及的。如果最初以 (36) 形式表示的约束或约束集合可以通过积分还原为 (35) 形式，则称其为完整的。

3 虚位移和 d'Alembert 原理

力学系统的**构型**由其每个粒子的瞬时位置定义。对于一个受约束的力学系统来说，在任何瞬时 t 都有无限多种可能的构型，即符合约束条件的构型。

3.1 虚位移

在同一时刻将一个可能构型变为另一个可能构型的微小位移称为**虚位移**。更确切地说，给定一个由 N 个粒子组成的系统，虚拟位移 $\delta\mathbf{r}_i$，$i=1,\cdots,N$，是从位置 $\mathbf{r}_1,\cdots,\mathbf{r}_N$ 开始的无穷小位移。这些位移是瞬时进行的，并具有与约束条件相匹配的特性。简而言之，虚位移的定义属性是 (1) 无穷小；(2) 在固定瞬间发生；(3) 不违反约束条件。

一个粒子被限制在一个运动表面上。设 $f(\mathbf{r},t)=0$ 为曲面方程。虚位移必须符合约束条件，即点 $\mathbf{r}$ 和位移点 $\mathbf{r}+\delta\mathbf{r}$ 必须在同一时间 t 属于曲面：

$$f(\mathbf{r}+\delta\mathbf{r},t)=0 \Longrightarrow f(\mathbf{r},t)+\nabla f\cdot\delta\mathbf{r}=0 \Longrightarrow \nabla f\cdot\delta\mathbf{r}=0 \tag{37}$$

由于在 t 时刻，∇f 垂直于表面，因此在同一时刻，虚位移 $\delta\mathbf{r}$ 与表面相切。

但注意，实位移 $d\mathbf{r}$ 是在时间间隔 dt 内发生的。因此，为了让粒子留在表面上，必须满足以下条件

$$f(\mathbf{r}+d\mathbf{r},t+dt)=0\Longrightarrow\nabla f\cdot d\mathbf{r}+\frac{\partial f}{\partial t}dt=0 \tag{38}$$

只要 $\partial f/\partial t\neq 0$，实位移 $d\mathbf{r}$ 就不与表面相切。只有在固定时间进行的虚拟位移 $\delta\mathbf{r}$ 才与表面相切，即使它在移动。

3.2 虚功

如果质点所在的表面是理想的光滑表面，那么表面对质点的接触力就没有切向分量，因此是表面的法向力。因此，即使表面处于运动状态，质点发生虚拟位移时约束力做的功也为零，这与实际位移时做的功不同，后者不一定为零。

在许多情况下约束力的总虚功为零。但存在滑动摩擦力的情况除外，因为相关的虚位移为零，约束力的虚功也不为零。摩擦是一种严格意义上的宏观现象，对于力学一般公式的发展并不重要。在虚位移过程中，相关力不做功的约束称为**理想约束**。我们仅限于考虑完全受理想约束的力学系统。

3.3 虚功原理

Newton 力学公式的特征是一组微分方程

$$m_i\ddot{\mathbf{r}}_i=\mathbf{F}_i\qquad i=1,\cdots,N \tag{39}$$

其中，$\mathbf{F}_i$ 是第 i 个粒子上的总力或合力，应是位置、速度和时间的已知函数。一旦确定了初始时刻的位置和速度，这个微分方程系统就能为 $\mathbf{r}_i(t)$ 找出唯一的解。

存在约束条件的情况下牛顿公式并不方便。首先，通常需要使用比指定系统配置所需更多的坐标。例如，当约束是完整的，位置 $\mathbf{r}_1,\cdots,\mathbf{r}_N$ 并非相互独立，因此 Newton 方法需要使用冗余变量。此外，第 i 个粒子所受的总力可分解为

$$\mathbf{F}_i=\mathbf{F}_i^{(a)}+\mathbf{f}_i \tag{40}$$

其中，$\mathbf{F}_i^{(a)}$ 是**作用力**，$\mathbf{f}_i$ 是**约束力**。困难在于我们并不先验地知道约束力如何取决于位置和速度。我们知道的是约束力产生的效果。我们也可以说，外加的力才是运动的真正原因，约束力只是为了确保在时间过程中保持几何或运动学上的限制。Newton 第二定律和第三定律的强力形式无法正确描述某些约束系统的运动。

我们希望经典力学的表述尽可能简洁，即只涉及作用力，只使用独立坐标。当所有约束条件都是完整的时候，Lagrange 形式就能实现这一目标。

首先考虑一种静态情况，即处于平衡状态的粒子系统。在这种情况下，$\mathbf{F}_i=0$，无论虚拟位移 $\delta\mathbf{r}_i$ 可能是多少，

$$\sum_i \mathbf{F}_i\cdot\delta\mathbf{r}_i=0 \tag{41}$$

借助分解式 (40) 可得

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{(a)}\cdot\delta\mathbf{r}_i+\sum_i \mathbf{f}_i\cdot\delta\mathbf{r}_i=0 \tag{42}$$

限制在约束力的虚功为零的广泛情况下就得出了**虚功原理**：

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{(a)}\cdot\delta\mathbf{r}_i=0 \tag{43}$$

根据这一原理，我们可以仅用外力来表示受约束系统的平衡条件。

3.4 d'Alembert 原理

动力学中可以通过将 Newton 第二定律写成 $\mathbf{F}_i-\dot{\mathbf{p}}_i=0$ 的形式将其简化为静力学，其中 $\mathbf{p}_i=m_i\dot{\mathbf{r}}_i$。根据 d'Alembert 的解释，系统中的每个质点都在一个合力的作用下处于“平衡”状态，这个合力就是实际力加上一个等于 $-\dot{\mathbf{p}}_i$ 的“有效反向力”。这个虚构的附加力是存在于非惯性系中的惯性力，它与粒子一起运动，也就是说粒子在非惯性系中保持静止。此时的方程不是 (41)，而是

$$\sum_i(\dot{\mathbf{p}}_i-\mathbf{F}_i)\cdot\delta\mathbf{r}_i=0 \tag{44}$$

不管虚位移 $\delta\mathbf{r}_i$ 是多少，其显然是正确的。再次使用分解式 (40)，并假设约束力的虚功为零，可以得出 **d'Alembert 原理**

$$\sum_i\left(\dot{\mathbf{p}}_i-\mathbf{F}_i^{(a)}\right)\cdot\delta\mathbf{r}_i=0 \tag{45}$$

该原理是虚功原理在力学运动系统中的延伸。对于约束系统而言，d'Alembert 原理是 Newton 方法的一个重大飞跃，因为它排除了对约束力的任何依赖。但在具体应用中，必须考虑到虚位移 $\delta\mathbf{r}_i$ 并不是独立的，它们必须与约束相协调。

4 广义坐标和 Lagrange 方程

4.1 广义坐标

只要系统是完整的，就可以引入一定数量的 n 个自变量，一般用 $q_1,\cdots,q_n$ 表示，称为**广义坐标**，这样：(a) 每个粒子的位置矢量在任何时刻都由 q 的值决定；(b) 假设约束条件为 (35)，如果用 q 表示，则约束条件完全相同。

考虑一个由 N 个粒子组成的机械系统，它受 p 个完整约束条件的限制

$$\begin{gathered} f_1\left(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_N, t\right) = 0 \\ \vdots \\ f_p\left(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_N, t\right) = 0 \end{gathered} \tag{46}$$

在 $3N$ 个坐标 $(x_1, y_1, z_1), \cdots, (x_N, y_N, z_N)$ 中，只有 $n = 3N - p$ 个坐标是相互独立的，因此系统具有 n 个**自由度**。可以引入 n 个广义坐标 $q_1, \cdots, q_n$，其中

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i\left(q_1, \cdots, q_n, t\right) \qquad i = 1, \cdots, N \tag{47}$$

其与式 (46) 完全一致。一个完整力学系统的自由度与广义坐标的数量一样多，而广义坐标是在任何时刻指定其构型所必需的。用几何语言，在每个瞬时，式 (46) 在维数为 $3N$ 的空间中定义了一个维数为 n 的曲面，式 (47) 是曲面的参数方程。

广义坐标的每一组数值都定义了系统的构型，即所有粒子在任何时刻的位置。坐标轴与广义坐标相对应的笛卡尔空间称为系统的**构型空间**。不过，将构型空间表示为笛卡尔空间只是一种象征化。严格来说，构型空间具有可微流形的数学结构，这也是它被称为**构型流形**的原因。

通过 (47) 引入广义坐标后，虚位移 $\delta\mathbf{r}_i$ 可以用独立的虚拟位移 δq_k 表示，即

$$\delta\mathbf{r}_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k \tag{48}$$

这是因为时间是固定的。另一方面

$$\mathbf{v}_i = \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \tag{49}$$

由于约束力没有出现在 d’Alembert 原理中，因此外力的上标可被去掉，采用更简短的符号 $\mathbf{F}_i \equiv \mathbf{F}_i^{(a)}$。利用 (48)，外力的虚功变为

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k \equiv \sum_{k=1}^{n} Q_k \delta q_k \tag{50}$$

其中

$$Q_k = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \tag{51}$$

定义为**广义力**的第 k 个分量。尽管名称如此，但只要相应的 q_k 没有长度量纲，Q_k 就没有力的量纲；但每个 $Q_k \delta q_k$ 项都有功的量纲。

d’Alembert 原理涉及的另一个量是

$$\sum_{i=1}^{N} \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbf{v}}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} m_i \dot{\mathbf{v}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k \tag{52}$$

利用以下恒等式

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbf{v}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^{N} \left\{ \frac{d}{dt} \left(m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \right) - m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \right) \right\} \tag{53}$$

在 (53) 的最后一项中，可以使用以下结果

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \right) = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial}{\partial q_l} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_l + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_k} \tag{54}$$

这里使用了 (49)，从现在起 q 和 $\dot{q}$ 被视为独立的量，因此关于 q 的偏导数将 $\dot{q}$ 视为常数，反之亦然。此外，从 (49) 可以立即发现

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \tag{55}$$

这样就可以将式 (53) 转换为以下形式

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbf{v}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} &= \sum_{i=1}^{N} \left\{ \frac{d}{dt} \left(m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_k} \right) - m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_k} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^{N} \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{1}{2} m_i \nu_i^2 \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{1}{2} m_i \nu_i^2 \right) \right\} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} \end{aligned} \tag{56}$$

其中

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2 \tag{57}$$

是系统的动能。我们可以假设动能 T 和广义力的分量 Q_k 完全可以通过公式 (47) 和 (49) 用 q 和 $\dot{q}$ 来表示。将 (50)、(52) 和 (56) 代入 (45) 可得

$$\sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k \right\} \delta q_k = 0 \tag{58}$$

由于 δq 相互独立且任意，只有当每个 δq_k 的系数为零时上式才能成立。因此可以推断出以下方程

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \qquad k = 1, \cdots, n \tag{59}$$

有时也称为 Lagrange 方程。不过我们将把这一名称留给最重要的情形，即外加力可以从势能中推导出来。

4.2 Lagrange 方程

当外加力 $\mathbf{F}_i$ 可以从标量势能 $V(\mathbf{r}_1, \cdots, \mathbf{r}_N, t)$ 中导出时，方程 (59) 的形式就特别简洁。在这种情况下

$$\mathbf{F}_i = -\nabla_i V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial V}{\partial y_i} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial V}{\partial z_i} \hat{\mathbf{z}} \right) \tag{60}$$

而广义力的写法是

$$Q_k=\sum_{i=1}^{N}\mathbf{F}_i\cdot\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_k}=-\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}+\frac{\partial V}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_k}+\frac{\partial V}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right)=-\frac{\partial V}{\partial q_k} \tag{61}$$

其中使用了链式法则。根据式 (47)，势能 V 仅表示为 q 的函数，与广义速度无关。将 (61) 插入 (59)，结果是

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_k}\right)-\frac{\partial}{\partial q_k}(T-V)=0 \tag{62}$$

由于 $\partial V/\partial\dot{q}_k=0$，上式等价于

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{q}_k}(T-V)\right]-\frac{\partial}{\partial q_k}(T-V)=0 \tag{63}$$

用以下公式定义 **Lagrange 函数**或 **Lagrangian** L

$$L=T-V \tag{64}$$

系统的运动方程形式为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_k}=0\qquad k=1,\cdots,n \tag{65}$$

从现在起把式 (65) 称为 **Lagrange 方程**。

式 (65) 由 n 个二阶常微分方程组成，只要在某个初始时刻 t_0 的 $2n$ 个初始条件 $q_1(t_0),\cdots,q_n(t_0)$ 和 $\dot{q}_1(t_0),\cdots,\dot{q}_n(t_0)$ 就可以唯一确定。当所有广义坐标都确定为时间函数后，系统中每个粒子在任意时间 t 的位置由式 (47) 给出。

4.3 Lagrange 方程的不变性

如果 $Q_1,\cdots,Q_n$ 是新的广义坐标，它们是原坐标 $q_1,\cdots,q_n$ 的可微函数，我们有

$$Q_k=G_k(q_1,\cdots,q_n,t)\qquad k=1,\cdots,n \tag{66}$$

反之

$$q_k=g_k(Q_1,\cdots,Q_n,t)\qquad k=1,\cdots,n \tag{67}$$

可逆性要求变换的 Jacobian 满足以下条件：

$$\frac{\partial(q_1,\cdots,q_n)}{\partial(Q_1,\cdots,Q_n)}\equiv\det\left(\frac{\partial q_k}{\partial Q_l}\right)=\left(\frac{\partial(Q_1,\cdots,Q_n)}{\partial(q_1,\cdots,q_n)}\right)^{-1}\neq 0 \tag{68}$$

坐标变换 (66) 被称为点变换，因为它将 q 所描述的构型空间中的点映射到 Q 所描述的构型空间中的点。在数学术语中，双射可微对象 G，若其逆为 $g=G^{-1}$ 也可微，称其为**微分同胚**，Q 的构型空间**微分同胚于** q 的构型空间。

对式 (67) 求时间导数可得

$$\dot{q}_k = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial q_k}{\partial Q_l} \dot{Q}_l + \frac{\partial q_k}{\partial t} \tag{69}$$

这是因为

$$\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{Q}_l} = \frac{\partial q_k}{\partial Q_l} \tag{70}$$

变换后的 Lagrangian $\bar{L}\left(Q, \dot{Q}, t\right)$ 就是用 $\left(Q, \dot{Q}, t\right)$ 表示的原始拉格朗日 $L\left(q, \dot{q}, t\right)$:

$$\bar{L}\left(Q, \dot{Q}, t\right) = L\left(q\left(Q, t\right), \dot{q}\left(Q, \dot{Q}, t\right), t\right) \tag{71}$$

由于 $\partial q_k / \partial \dot{Q}_l = 0$，可写出

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{Q}_i} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial \dot{Q}_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{Q}_i} \right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial q_k}{\partial Q_i} \tag{72}$$

因此

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{Q}_i}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) \frac{\partial q_k}{\partial Q_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_k}{\partial Q_i}\right) \right] \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) \frac{\partial q_k}{\partial Q_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial Q_i} \right] \end{aligned} \tag{73}$$

其中使用了公式 (54)，用 q_k 代替 $\mathbf{r}_i$，用 Q_i 代替 q_k。上式与

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial Q_i} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial Q_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial Q_i} \right) \tag{74}$$

根据 (65)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{Q}_i}\right) - \frac{\partial \bar{L}}{\partial Q_i} = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} \right] \frac{\partial q_k}{\partial Q_i} = 0 \tag{75}$$

完成证明。Lagrange 方程在微分同胚下是不变的。

虽然可以用任意广义坐标来表示，但 Lagrangian $L = T - V$ 最初必须用相对于惯性参照系的位置和速度来表示。

5 广义势和耗散函数

5.1 广义势

如果可以通过方程 $U\left(q_1, \cdots, q_n, \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_n, t\right)$ 导出广义力

$$Q_k = -\frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k}\right) \tag{76}$$

则式 (59) 仍可表示式 (65)，其 Lagrangian 定义为

$$L = T - U \tag{77}$$

函数 U 被称为**广义势或速度相关势**。式 (76) 所包含的力的集合大于保守力的集合，后者对应于 U 既不依赖于广义速度也不依赖于时间的特殊情况。

5.2 电磁场中带电粒子的 Lagrangian

带电荷 e 的粒子在外部电磁场中运动时受到的力是 **Lorentz 力**

$$\mathbf{F} = e\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}\right) \tag{78}$$

根据 Maxwell 方程组，我们可以用标势 $\phi(\mathbf{r}, t)$ 和矢势 $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ 来表示场，如下：

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \qquad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \tag{79}$$

选择粒子本身的 Cartesian 坐标作为广义坐标，广义力分量就是 Lorentz 力的 Cartesian 分量

$$\mathbf{F} = e\left\{-\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A})\right\} \tag{80}$$

我们打算证明对于某个函数 U，**FF** 可以用 (76) 的形式表示。但是在 (76) 中有一个时间 q 全导数，而在 (80) 中只有一个时间偏导数。我们可以在 (80) 中引入时间全导数，注意到

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z}\dot{z} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \tag{81}$$

并利用

$$\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A} \tag{82}$$

其一般性质为

$$\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} + \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a}) \tag{83}$$

由于 nabla 算子只影响位置变量，式 (80) 变为

$$\mathbf{F} = e\left\{-\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{1}{c}\nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A})\right\} \tag{84}$$

利用算子 $\nabla_v = \hat{\mathbf{x}}\partial/\partial\dot{x} + \hat{\mathbf{y}}\partial/\partial\dot{y} + \hat{\mathbf{z}}\partial/\partial\dot{z}$ 并考虑到广义坐标和速度被视为自变量，可以得到

$$\mathbf{F} = e\left\{-\nabla\left(\phi - \frac{1}{c}\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}\right)\right\} - \frac{e}{c}\frac{d\mathbf{A}}{dt} = -\nabla\left(e\phi - \frac{e}{c}\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}\right) + \frac{d}{dt}\left[\nabla_v\left(e\phi - \frac{e}{c}\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}\right)\right] \tag{85}$$

因为 ϕ 和 $\mathbf{A}$ 与速度无关。

回顾 $q_1 = x$，$q_2 = y$，$q_3 = z$，力 $\mathbf{F}$ 的形式为 (76)，其中

$$U = e\phi - \frac{e}{c}\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \tag{86}$$

由此可见

$$L = T - U = \frac{mv^2}{2} - e\phi + \frac{e}{c}\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \tag{87}$$

是带电粒子在外电磁场中的 Lagrangian。

5.3 Rayleigh 耗散函数

只要广义力的形式为

$$Q_k = -\frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k}\right) + Q'_k \tag{88}$$

其中 Q'_k 表示无法从广义势推导出的广义力部分，运动方程 (59) 变为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q'_k \tag{89}$$

其中 $L = T - U$。一种重要的情形是，Q'_k 表示与粒子速度成正比的粘性摩擦力。以 Cartesian 分量表示为

$$F'_{ix} = -k_{ix}v_{ix} \quad F'_{iy} = -k_{iy}v_{iy} \quad F'_{iz} = -k_{iz}v_{iz} \tag{90}$$

其中，F'_i 是第 i 个粒子上的耗散力，k_{ix}、k_{iy}、k_{iz} 是正常数。为了便于更普遍地处理这种情况，Rayleigh 引入了**耗散函数**，定义如下

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(k_{ix}v_{ix}^2 + k_{iy}v_{iy}^2 + k_{iz}v_{iz}^2\right) \tag{91}$$

其性质为

$$F'_{ix} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v_{ix}} \qquad F'_{iy} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v_{iy}} \qquad F'_{iz} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v_{iz}} \tag{92}$$

对耗散力在单位时间内所做功的检验显示了 Rayleigh 耗散函数的物理意义：

$$\frac{dW'}{dt} = \sum_{i=1}^{N}\mathbf{F}'_i \cdot \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N}\mathbf{F}'_i \cdot \mathbf{v}_i = -\sum_{i=1}^{N}\left(k_{ix}v_{ix}^2 + k_{iy}v_{iy}^2 + k_{iz}v_{iz}^2\right) = -2\mathcal{F} \tag{93}$$

事实证明，$2F$ 是系统能量的耗散率。

广义力的耗散部分可写成

$$\begin{aligned} Q'_k &= \sum_{i=1}^{N}\mathbf{F}'_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^{N}\mathbf{F}'_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_k} \\ &= -\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v_{ix}}\frac{\partial v_{ix}}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v_{iy}}\frac{\partial v_{iy}}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v_{iz}}\frac{\partial v_{iz}}{\partial \dot{q}_k}\right) = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_k} \end{aligned} \tag{94}$$

其中使用了 (55) 和链式法则。根据上式，运动方程 (89) 变为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_k} = 0 \tag{95}$$

6 中心力和 Bertrand 定理

考虑一个质点受到一个力的作用，这个力只取决于质点到一个固定点的距离，并沿着质点和力的中心所确定的线指向质点。考虑到问题的对称性，使用球面坐标 r、θ、ϕ 比较方便，其定义为 $x = r\sin\theta\cos\phi$、$y = r\sin\theta\sin\phi$、$z = r\cos\theta$。用球面坐标表示，粒子速度的 Cartesian 分量为

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \dot{r}\sin\theta\cos\phi + r\dot{\theta}\cos\theta\cos\phi - r\dot{\phi}\sin\theta\sin\phi \\
\dot{y} &= \dot{r}\sin\theta\sin\phi + r\dot{\theta}\cos\theta\sin\phi + r\dot{\phi}\sin\theta\cos\phi \\
\dot{z} &= \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta
\end{aligned} \tag{96}$$

系统的 Lagrangian 形为

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - V(r) = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta\right) - V(r) \tag{97}$$

其中，$V(r)$ 是与中心力 $\mathbf{F}$ 相关的势能。Lagrangian (97) 可以通过使用 $\mathbf{v} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\dot{\phi}\sin\theta\hat{\boldsymbol{\phi}}$ 更容易得到。

力与位置矢量 $\mathbf{r}$ 平行，因此相对于原点的力矩为零，角动量 $\boldsymbol{l} = \mathbf{r}\times\mathbf{p}$ 是一个恒定矢量。由于 $\boldsymbol{l}$ 与 $\mathbf{r}$ 和 $\mathbf{p}$ 定义的平面正交，因此运动发生在垂直于矢量 $\boldsymbol{l}$ 的平面内。令 z 轴与 $\boldsymbol{l}$ 平行，粒子在 $z = 0$ 或 $\theta = \pi/2$ 定义的平面内运动。因此，r 和 ϕ 成为 xy 平面上的极坐标，利用 $\theta = \pi/2$ 和 $\dot{\theta} = 0$，Lagrangian (97) 得到了更简单的形式

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) - V(r) \tag{98}$$

Lagrange 方程为

$$m\ddot{r} - mr\dot{\phi}^2 + \frac{dV}{dr} = 0 \tag{99}$$

$$\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\phi}\right) = 0 \tag{100}$$

其中第二个方程的解是

$$mr^2\dot{\phi} = l = \text{常数} \tag{101}$$

即 Kepler 面积定律：从太阳到行星的直线在相等的时间内扫过相等的面积。常数 l 是角动量的大小。

根据能量守恒

$$T + V = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) + V(r) = E = \text{常数} \tag{102}$$

利用 (100)，上式可以转换为以下形式

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r) \equiv \frac{m}{2}\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) \tag{103}$$

其中

$$V_{\text{eff}}(r)=\frac{l^2}{2mr^2}+V(r) \tag{104}$$

式 (103) 表明，径向运动等同于粒子在**有效势能** $V_{\text{eff}}(r)$ 中的一维运动。

如果 $r=r_0$ 是能量为 E_0 的圆轨道，可证明 $E_0=V_{\text{eff}}(r_0)$，$V'_{\text{eff}}(r_0)=0$，或等价的 $l^2/mr_0^3=V'(r_0)$。进一步可证

$$V''_{\text{eff}}(r_0)=\frac{3}{r_0}V'(r_0)+V''(r_0) \tag{105}$$

利用

$$\frac{d}{dt}=\frac{d\phi}{dt}\frac{d}{d\phi}=\dot{\phi}\frac{d}{d\phi}=\frac{l}{mr^2}\frac{d}{d\phi} \tag{106}$$

时间可以从式 (103) 中去除，得到新的形式

$$\frac{l^2}{2mr^4}\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2+V_{\text{eff}}(r)=E \tag{107}$$

由此得出轨迹方程：

$$\phi=\int\frac{ldr}{r^2\sqrt{2m\left[E-V_{\text{eff}}(r)\right]}} \tag{108}$$

6.1 Kepler 问题

行星在太阳引力场中的势能为 $V(r)=-\kappa/r$，$\kappa=GmM$，其中 m 是行星的质量，M 是太阳的质量，G 是引力常数。引入变量 $u=1/r$，(108) 中的积分就变得简单了：

$$\phi=-\int\frac{ldu}{\sqrt{2mE+2m\kappa u-l^2u^2}}=\cos^{-1}\frac{l/r-m\kappa/l}{\sqrt{2mE+\kappa^2m^2/l^2}} \tag{109}$$

其中角度原点的选择是为了使积分常数为零。定义

$$e=\sqrt{1+\frac{2El^2}{m\kappa^2}} \tag{110}$$

(109) 中 r 的解为

$$\frac{1}{r}=\frac{m\kappa}{l^2}(1+e\cos\phi) \tag{111}$$

这个方程表示一个以原点为焦点的圆锥截面。如果 $E<0$，则 $e<1$，轨道是离心率为 e 的椭圆；如果 $E=0$（$e=1$），轨道是抛物线；如果 $E>0$（$e>1$），轨道是双曲线。

6.2 Bertrand 定理

如果粒子到力中心的距离保持在两个极值之间，即 $r_{\min}\leqslant r\leqslant r_{\max}$，则称该轨道为有界轨道。有界轨道并不一定是封闭的：粒子可以在 $r_{\min}\leqslant r\leqslant r_{\max}$ 的环形范围内无限

绕行，而轨迹永远不会闭合。在引力势或库仑势的情况下，所有有界轨道都是封闭的。J. Bertrand 在 1873 证明，对于中心势来说，这是一个罕见的现象。

Bertrand 定理：所有有界轨道都闭合的中心势只有 $V(r) = -\kappa/r$ 和 $V(r) = -\kappa r^2$，其中 $\kappa > 0$，也就是说，力与距离平方成反比，或者服从 Hooke 定律。

证明：设 Φ 为从 $r = r_{\min}$ 到 $r = r_{\max}$ 再回到 $r = r_{\min}$ 的完整径向振动过程中的旋转角度。根据式 (108)

$$\Phi = 2\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{ldr}{r^2\sqrt{2m\left[E - V_{\text{eff}}(r)\right]}} = 2\int_{u_{\min}}^{u_{\max}} \frac{ldu}{\sqrt{2m\left[E - W(u)\right]}} \tag{112}$$

其中 $u = 1/r$，

$$W(u) = V_{\text{eff}}\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{l^2u^2}{2m} + V\left(\frac{1}{u}\right) \tag{113}$$

如果经过整数 (n) 次完整的径向摆动后，角位移为 2π 弧度的整数 (m) 倍：$n\Phi = m2\pi$，则有界轨道为闭合轨道。如果所有有界轨道都是闭合的，那么近圆轨道也同样是闭合的。正如式 (103) 定义的等效一维问题所暗示的，有效势能 $V_{\text{eff}}(r)$ 在 $r_{\min}$ 和 $r_{\max}$ 之间的某个 r_0 处达到最小值。考虑一下半径为 r_0、能量为 E_0 的圆形轨道受到微扰后产生的有界轨道。令 $E = E_0 + \Delta E$ 并在 $u = u_0 = 1/r_0$ 处展开 $W(u)$ 到二阶项，结果是

$$E - W(u) = E_0 + \Delta E - W(u_0) - W'(u_0)(u - u_0) - \frac{1}{2}W''(u_0)(u - u_0)^2 \tag{114}$$

根据 $E_0 - W(u_0) = E_0 - V_{\text{eff}}(r_0) = 0$，

$$W'(u_0) = \left[\frac{l^2u}{m} - \frac{1}{u^2}V\prime\left(\frac{1}{u}\right)\right]_{u=1/r_0} = \frac{1}{r_0}\left[\frac{l^2}{m} - r_0^3V'(r_0)\right] = 0 \tag{115}$$

且

$$\begin{aligned} W''(u_0) &= \left[\frac{l^2}{m} + \frac{2}{u^3}V'\left(\frac{1}{u}\right) + \frac{1}{u^4}V''\left(\frac{1}{u}\right)\right]_{u=1/r_0} \\ &= 3r_0^3V'(r_0) + r_0^4V''(r_0) = r_0^4V_{\text{eff}}''(r_0) \end{aligned} \tag{116}$$

因此

$$E - W(u) = \Delta E - \frac{1}{2}W''(u_0)(u - u_0)^2 \tag{117}$$

而旋转角的表达式 (112) 则简化为

$$\Phi = 2l\int_{u_{\min}}^{u_{\max}} \frac{du}{\sqrt{2m\Delta E - mW''(u_0)(u - u_0)^2}} \tag{118}$$

令 $a^2 = 2\Delta E/W''(u_0)$ 和 $u = u_0 + a\sin\theta$ 可得

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{2l}{\sqrt{mW''(u_0)}}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{a\cos\theta d\theta}{\sqrt{a^2\left(1 - \sin^2\theta\right)}} \\ &= \frac{2\pi l}{r_0^2\sqrt{mV_{\text{eff}}''(r_0)}} = 2\pi\sqrt{\frac{V'(r_0)}{3V'(r_0) + r_0V''(r_0)}} \end{aligned} \tag{119}$$

改变角动量 l，半径 r_0 会连续变化，但 Φ 是 2π 的有理倍数不能连续变化。要解决这个难题，就必须要求等式链 (119) 中最右边的项是一个与 r_0 无关的常数，这就要求势能 $V(r)$ 满足微分方程 $rV''(r)+3V'(r)=\alpha V'(r)$，其中 α 是一个正常数。因此，可能的势只有 $V(r)=\kappa r^{\beta}\ (\beta>-2,\beta\neq 0)$ 或 $V(r)=\kappa\ln r$。对于这些势

$$\Phi=\frac{2\pi}{\sqrt{\beta+2}} \tag{120}$$

且对于对数情况 $\beta=0$。对数势是不可接受的，因为 $2\pi/\sqrt{2}$ 不是 2π 的有理倍数。(120) 不依赖于能量，因此在极限 $E\to\infty$ 或 $E\to 0$ 的情况下仍然有效。证明的其余部分的基本思想是找到这些极限情况下的旋转角表达式，并要求它们与结果 (120) 相同。

因为要使有界轨道存在，力必须是有吸引的，$V'(r)>0$。因此，如果 $\beta>0$ 则 $\kappa>0$，如果 $-2<\beta<0$ 则 $\kappa<0$。在 $V(r)=\kappa r^{\beta}$ 且 $\kappa>0$、$\beta>0$ 的情况下，考虑极限 $E\to\infty$。从等式 $E=l^2/2mr^2+\kappa r^{\beta}$ 对 $r=r_{\min}$ 或 $r=r_{\max}$ 都成立可知，当 $E\to\infty$ 时有 $r_{\max}\to\infty$ 和 $r_{\min}\to 0$，因此有 $u_{\min}\to 0$ 和 $u_{\max}\to\infty$。改变变量 $u=yu_{\max}$ 后，式 (112) 的旋转角变换为

$$\Phi=\frac{2l}{\sqrt{2m}}\int_{y_{\min}}^{1}\frac{dy}{\sqrt{\mathcal{U}(1)-\mathcal{U}(y)}} \tag{121}$$

其中

$$\mathcal{U}(y)=y^2\left[\frac{l^2}{2m}+\frac{\kappa}{(yu_{\max})^{\beta+2}}\right] \tag{122}$$

在极限 $E\to\infty$，积分 (121) 变为

$$\Phi=\frac{2l}{\sqrt{2m}}\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{\frac{l^2}{2m}-\frac{l^2y^2}{2m}}}=\frac{2l}{\sqrt{2m}}\frac{\sqrt{2m}}{l}\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\pi \tag{123}$$

与 (120) 相比较，可发现 $\beta=2$。对于简谐势 $V(r)=\kappa r^2$，容易证明所有轨道都是有界和封闭的。

在 κ 和 β 均为负数的情况下，最好写成 $\kappa=-\sigma$ 和 $\beta=-\lambda$，其中 $\sigma>0$，$0<\lambda<2$。在极限 $E\to\infty$ 中，u 的极值是 $0=\frac{l^2}{2mr^2}-\frac{\sigma}{r^{\lambda}}=\frac{l^2u^2}{2m}-\sigma u^{\lambda}$ 的解，即 $u_{\min}=0$ 和 $u_{\max}=(2m\sigma/l^2)^{1/(2-\lambda)}$。$E=0$ 时用和前面同样的替换 $u=yu_{\max}$，旋转角的表达式 (112) 变为

$$\Phi=\frac{2l}{\sqrt{2m}}\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{-\frac{l^2y^2}{2m}+\frac{\sigma y^{\lambda}}{u_{\max}^{2-\lambda}}}}=2\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{y^{\lambda}-y^2}} \tag{124}$$

引入新变量 $x=y^{(2-\lambda)/2}$ 可得

$$\Phi=\frac{4}{2-\lambda}\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2\pi}{2-\lambda}=\frac{2\pi}{2+\beta} \tag{125}$$

将这一结果与 (120) 进行比较得出 $\beta=-1$，证毕。

注意，在力与距离平方成反比的情况下，$\Phi = 2\pi$，因此轨道在一次径向振动中闭合。在 Hooke 定律力的情况下，$\Phi = \pi$，轨道只有在两次完整的径向振动后才会闭合。

在行星距离上，广义相对论通过增加一个与 $1/r^3$ 成正比的小项来修正太阳产生的 Newton 势。正如 Bertrand 定理的预测，行星的轨道并不是封闭的：每颗行星都描述了一个椭圆，其轴心围绕太阳缓慢旋转。水星受到的影响最为明显。